

d'enregistrement

C.N.R.S. :

O. 4601

THESE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

—
par

Yvar EKELAND

—
pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Sujet de la thèse :

RELAXATION DE PROBLEMES DE CONTROLE OPTIMAL
POUR DES SYSTEMES GOUVERNES PAR DES EQUATIONS
AUX DERIVEES PARTIELLES DE TYPE ELLIPTIQUE

Soutenue le 20 novembre 1970 devant la Commission d'examen

MM. LIONS

PALLU DE LA BARRIERE
NEVEU

Président

} Examineurs

N° d'enregistrement
au C.N.R.S. :

A. O. 4601

THESE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

par

Yvar EKELAND

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

Sujet de la thèse :

RELAXATION DE PROBLEMES DE CONTROLE OPTIMAL
POUR DES SYSTEMES GOUVERNES PAR DES EQUATIONS
AUX DERIVEES PARTIELLES DE TYPE ELLIPTIQUE

Soutenue le 20 novembre 1970 devant la Commission d'examen

MM. LIONS

PALLU DE LA BARRIERE
NEVEU

Président

} Examineurs



REMERCIEMENTS

Je dois à monsieur PALLU DE LA BARRIERE ma formation de chercheur; en théorie du contrôle optimal comme dans bien d'autres domaines, c'est lui qui m'a inculqué les connaissances et les habitudes qui font un mathématicien. Monsieur LIONS a suivi ce travail depuis ses premières ébauches, bien informes; il m'a poussé à continuer, puis m'a soutenu au jour le jour, ne ménageant ni ses encouragements ni son indulgence. Tous deux m'ont offert l'hospitalité de leurs laboratoires, où l'amitié et la compétence de leurs élèves, en particulier de messieurs VALADIER et BENSOUSSAN, ont été mises à contribution. Je les prie de trouver ici l'expression de ma très profonde gratitude, et je m'honore de leur amitié.

Ce travail a été fait alors que j'étais attaché de recherches au C.N.R.S. , sous le parrainage de monsieur ARSAC, et durant un séjour à l' Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique . Je les remercie pour toutes les facilités qui m'ont été offertes durant ces années de recherche.

Je remercie monsieur NEVEU de me faire l'honneur de participer au jury, et de m'avoir proposé une deuxième thèse aussi intéressante.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

I. EKELAND

Relaxation de problèmes de contrôle pour des systèmes
gouvernés par des équations aux dérivées partielles de
de type elliptique

--§--

R E S U M E

Dans le présent travail, on étudie un problème de contrôle optimal pour un système gouverné par des équations aux dérivées partielles, avec un critère distribué. Ce problème ne présente pas en général de solutions optimales, mais il admet toujours des suites minimisantes. On montre que les points d'adhérence des suites minimisantes sont exactement les solutions optimales d'un nouveau problème de contrôle, appelé problème relaxé. On en déduit une condition suffisante pour que le problème de départ admette des solutions optimales.

Les méthodes de démonstration reposent sur la compacité des injections des espaces de Sobolev habituels dans L^2 , et sur les propriétés des fonctions convexes. On fait appel à deux théorèmes qui sont exposés au § 1, et, d'un point de vue technique, on utilise la théorie des multi-applications mesurables.

Le théorème principal est énoncé au § IV. On donne trois formes du problème relaxé; et on montre qu'elles sont équivalentes. Elles se rattachent formellement aux trois méthodes de relaxation connues pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires. On a donc renforcé et étendu ces trois méthodes aux équations elliptiques, et montré leur équivalence.

En ce qui concerne l'intégration et la théorie de la mesure, nous renvoyons à BOURBAKI, [3]; les équations aux dérivées partielles, à J.L.LIONS et E.MAGENES, [1], ou à J.NEČAS, [1]; les fonctions convexes, à J.J.MOREAU, [1], ou à R.T.ROCKAFELLAR, [2]; les multi-applications mesurables, à C.CASTAING, [5] ou [7].

--§--

I - COMPLEMENTS SUR LES ESPACES $L^p(1 \leq p < \infty)$

1. UN THEOREME SUR LA CONVERGENCE FAIBLE.

Soit T un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{C}$ et d'une mesure μ positive sur $\mathcal{C}$. On notera $L_h^p(T, \mathcal{C}; \mu)$ l'espace des fonctions mesurables de T dans $\mathbb{R}^h$, de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable. Si A est un sous-ensemble de T , on notera χ_A sa fonction caractéristique. Ici, comme dans toute la suite, on désignera par $\bigwedge_k$, où k est un entier, l'ensemble des $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que $\alpha_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. L'ensemble des points extrémaux de $\bigwedge_k$, noté $\ddot{\bigwedge}_k$, est formé des vecteurs de $\mathbb{R}^k$ déduits du vecteur $(1, 0, \dots, 0)$ par permutation des composantes.

Commençons par rappeler un lemme important qui est dû à KARLIN ([1], th.3, p.606), et qui est une conséquence du théorème de LYAPUNOV. Soit m une mesure vectorielle sur $(T, \mathcal{C})$ à valeurs dans un espace normé de dimension finie F . Si $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in L_k^\infty(T, \mathcal{C}; |m|)$, on pose par définition :

$$\int \tilde{\varphi} \cdot m = \left(\int \varphi_1 \cdot m, \dots, \int \varphi_k \cdot m \right) \in F^k$$

Notons $\mathcal{B}(\bigwedge_k)$ l'ensemble des applications $\mathcal{C}$ -mesurables de T dans $\bigwedge_k$ et $\mathcal{B}(\ddot{\bigwedge}_k)$ l'ensemble des applications $\mathcal{C}$ -mesurables de T dans $\ddot{\bigwedge}_k$.

Lemme (KARLIN) - Si $|m|$ est bornée et sans atomes, on a :

$$\left\{ \int \tilde{\varphi} \cdot m \mid \tilde{\varphi} \in \mathcal{B}(\bigwedge_k) \right\} = \left\{ \int \tilde{\psi} \cdot m \mid \tilde{\psi} \in \mathcal{B}(\ddot{\bigwedge}_k) \right\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.1. Supposons que la mesure μ est bornée et sans atomes, et que l'espace $L^1(T, \mathcal{C}; \mu)$ est séparable. Alors, pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \bigwedge_k$, il existe une suite $n \mapsto (A_n^1, \dots, A_n^k)$ de partitions de T en k parties appartenant à la tribu $\mathcal{C}$ telle que, pour tout k -uplet $\{f_1, \dots, f_k\}$ de $L^1(T, \mathcal{C}; \mu)$, la suite $n \mapsto \sum_{i=1}^k f_i \chi_{A_n^i}$ converge faiblement vers $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$ dans $L^1(T, \mathcal{C}; \mu)$.

Démonstration

L'espace $L^1(T, \mathcal{C}; \mu)$ est un espace de Banach de type dénombrable. La

boule-unité de son dual $L^\infty(T, \mathcal{C}; \mu)$ est donc un espace compact métrisable pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Elle contient donc une partie dénombrable dense, soit (g_p) , $p \in \mathbb{N}$.

Si $f_1, \dots, f_k$ appartiennent à L^1 , nous notons $\tilde{f}$ l'élément de $(L^1)^k$ de composantes $(f_1, \dots, f_k)$. Comme l'espace L^1 est séparable, l'espace $(L^1)^k$ l'est aussi. Il existe donc une partie dénombrable, $(\tilde{f}_q)$, $q \in \mathbb{N}$, dense dans $(L^1)^k$. Les composantes de $(\tilde{f}_q)$ seront notées $(f_{1q}, \dots, f_{kq})$.

Utilisons le procédé de Cantor pour dénombrer $\mathbb{N}^2$. Il consiste à dénombrer successivement les couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p+q = 0$, $p+q = 1$, $\dots$, $p+q = n$, $\dots$. Soit (p_r, q_r) , $r \in \mathbb{N}$, ce dénombrement. Notons $N(n)$ le nombre de couples (p, q) tels que $p+q \leq n$. Si un couple (p, q) est donné, il est clair que son rang r est inférieur ou égal à $N(p+q)$.

On définit une mesure vectorielle m sur $(T, \mathcal{C})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{N(n)})^k$ de la façon suivante :

$$\forall A \in \mathcal{C}, \quad m(A) = (m_1(A), \dots, m_k(A))$$

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad m_i(A) = \left(\int_A g_{p_r} f_{iq_r} \cdot \mu \right)_{0 \leq r \leq N(n)}$$

Comme $g_p f_{iq} \in L^1(T, \mathcal{C}; \mu)$ pour tout couple (p, q) , la mesure m est bornée et de base μ . Elle est donc sans atomes et on peut lui appliquer le lemme de KARLIN. Nous prenons pour $\tilde{\varphi}$ la fonction constante égale à $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ sur T . Il est clair que $\tilde{\varphi} \in \mathcal{B}(\dot{\bigwedge}_k)$. Il existe donc $\tilde{\psi}_n = (\psi_{n1}, \dots, \psi_{nk}) \in \mathcal{B}(\ddot{\bigwedge}_k)$ telle que :

$$\int \alpha_j g_{p_r} f_{iq_r} \cdot \mu = \int \psi_{nj} g_{p_r} f_{iq_r} \cdot \mu$$

pour $1 \leq i, j \leq k$ et $0 \leq r \leq N(n)$. En particulier :

$$\int \alpha_i g_{p_r} f_{iq_r} \cdot \mu = \int \psi_{ni} g_{p_r} f_{iq_r} \cdot \mu$$

Dire que $\tilde{\psi}_n$ appartient à $\mathcal{B}(\ddot{\bigwedge}_k)$ équivaut à dire que :

$$\psi_{ni}(t) \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\sum_{i=1}^k \psi_{ni}(t) = 1 \quad \forall t \in T$$

Les ψ_{ni} sont donc les fonctions caractéristiques d'ensembles A_n^i , $1 \leq i \leq k$, formant une partition de T . Comme $\tilde{\psi}_n$ est $\mathcal{C}$ -mesurable, les A_n^i appartiennent à la tribu $\mathcal{C}$. On a donc par définition des A_n^i :

$$\int_T \alpha_i \varepsilon_{p_r} f_{iq_r} \cdot \mu = \int_{A_n^i} \varepsilon_{p_r} f_{iq_r} \cdot \mu$$

pour $1 \leq i \leq k$ et $0 \leq r \leq N(n)$.

Soit alors $\tilde{f} \in (L^1)^k$. On se donne un élément g de la boule-unité de $L^\infty(T, \mathcal{C}; \mu)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on choisit un ε_p tel que

$$\left| \int (\varepsilon_p - g) f_i \cdot \mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \text{ puis un } \tilde{f}_q \text{ tel que}$$

$$\left| \int (f_{qi} - f_i) \varepsilon_p \cdot \mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ pour } 1 \leq i \leq k. \text{ On a } (p, q) = (p_r, q_r) \text{ avec } r \leq N(p+q).$$

Donc, pour $n \geq p+q$, pour $i = 1, \dots, k$, on aura :

$$\left| \int \alpha_i f_{iq} \varepsilon_p \cdot \mu - \int_{A_n^i} f_{iq} \varepsilon_p \cdot \mu \right| = 0$$

et en outre :

$$\left| \int \alpha_i (g - \varepsilon_p) f_i \cdot \mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\left| \int \alpha_i (f_i - f_{iq}) \varepsilon_p \cdot \mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\left| \int_{A_n^i} (f_i - f_{iq}) \varepsilon_p \cdot \mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\left| \int_{A_n^i} (g - \varepsilon_p) f_i \cdot \mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

En ajoutant membre à membre ces cinq inégalités, on obtient :

$$\left| \int \alpha_i g f_i \cdot \mu - \int_{A_n^i} g f_i \cdot \mu \right| \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \geq p+q$$

Donc, ε étant arbitraire, $\int f_i \chi_{A_n^i} g \cdot \mu$ converge vers $\int \alpha_i f_i g \cdot \mu$ pour tout i , quand n tend vers l'infini. Ceci est vrai quel que soit g appartenant à la boule-unité de $L^\infty(T, \mathcal{C}; \mu)$. Donc $f_i \chi_{A_n^i}$ converge faiblement vers $\alpha_i f_i$

dans $L^1(T, \mathcal{C}; \mu)$ pour tout i . En sommant en i on obtient que $\sum_{i=1}^k f_i \chi_{A_n^i}$ converge faiblement vers $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$. $\blacksquare$

Corollaire - Pour tout entier h , pour tout $p \in [1, +\infty[$, pour tout k - uole $\{f_1, \dots, f_k\}$ de $L_h^p(T, \mathcal{C}; \mu)$, la suite $n \mapsto \sum_{i=1}^n f_i \chi_{A_n^i}$ converge faiblement vers $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$ dans $L_h^p(T, \mathcal{C}; \mu)$.

Démonstration

Il suffit de vérifier que, pour tout $g \in L_h^{p'}(T, \mathcal{C}; \mu)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, la suite $n \mapsto \int g \cdot \sum_{i=1}^k f_i \chi_{A_n^i} \mu$ converge vers $\int g \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i \mu$ dans $\mathbb{R}$. Or, les fonctions gf_i appartiennent à $L^1(T, \mathcal{C}; \mu)$, et on peut leur appliquer le théorème 1.1. La suite $n \mapsto \sum_{i=1}^k gf_i \chi_{A_n^i}$ converge faiblement vers $\sum_{i=1}^k \alpha_i gf_i$ dans L^1 , et en particulier la suite $n \mapsto \int \sum_{i=1}^k gf_i \chi_{A_n^i}$ converge vers $\int \sum_{i=1}^k \alpha_i gf_i \mu$. $\blacksquare$

Le théorème 1.1. et son corollaire s'appliqueront lorsqu'on prendra pour T un borélien borné de $\mathbb{R}^n$, pour $\mathcal{C}$ sa tribu borélienne, pour μ la mesure induite par la mesure de Lebesgue. Ils s'appliqueront aussi à une variété compacte de dimension finie munie de sa tribu borélienne et d'une mesure de Radon sans atomes.

2 -

UN THEOREME D'EQUICONTINUITE.

Soit X un espace localement compact muni d'une mesure de Radon ν positive et bornée. Avec N. BOURBAKI, nous dirons qu'une application f de X dans un espace métrisable séparable F est mesurable s'il existe un ensemble ν -négligeable N et une partition de $X \setminus N$ formée d'une suite K_n d'ensembles compacts tels que la restriction de f à chacun des K_n soit continue (critère de LUSIN), ou, de manière équivalente, si l'image réciproque par f d'un borélien de F est un ν -mesurable de X .

On considère un compact métrisable K et une application f de $X \times \mathbb{R}^h \times K$ dans $\mathbb{R}$ qui soit de CARATHÉODORY, c'est-à-dire que :

pour tout $(y, u) \in \mathbb{R}^h \times K$, $f(., y, u)$ est mesurable ⁽¹⁾

pour tout $x \in X$, $f(x, ., .)$ est continue

Si Y et U sont deux applications de X dans $\mathbb{R}^h$ et de X dans K respectivement, on note $f(Y, U)$ l'application de X dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x, Y(x), U(x))$

$$f(Y, U)(x) = f(x, Y(x), U(x))$$

Lemme 1.2 - Si Y et U sont mesurables, $f(Y, U)$ est mesurable.

Démonstration

L'application f de $X \times \mathbb{R}^h \times K$ dans $\mathbb{R}$ satisfait aux hypothèses du théorème de SCORZÀ-DRAGONI (CASTAING, 5, théorème 3.1).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc une partie compacte H de X telle que :

$$\gamma(X \setminus H) \leq \varepsilon$$

$$f|_{H \times \mathbb{R}^h \times K} \text{ est continue.}$$

En composant par les fonctions mesurables Y et U , on obtient :

$$f(Y, U)|_H \text{ est mesurable}$$

et comme ε est arbitraire, $f(Y, U)$ est mesurable sur X .

Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des applications mesurables de X dans K .

Lemme 1.3. - Si des fonctions mesurables Y_n convergent vers Y en mesure, alors la suite $f(Y_n, U)$ converge en mesure vers $f(Y, U)$, uniformément pour $U \in \mathcal{U}$.

Démonstration

Soient une suite Y_n convergeant en mesure vers Y , et un nombre $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour k entier donné, on note G_k l'ensemble des $x \in X$ tels que :

$$\forall u \in K, |y - Y(x)| \leq \frac{1}{k} \implies |f(x, y, u) - f(x, Y(x), u)| \leq \varepsilon$$

⁽¹⁾ Note La notation $f(., y, v)$ désigne la fonction $x \mapsto f(x, y, v)$

Comme $f(x, \dots)$ est continue sur $\mathbb{R} \times K$ pour tout x , et comme K est compact, $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ (BOURBAKI, [2], § 3, N° 4, th.3). Il est clair que $G_k \subset G_{k+1}$.

Par ailleurs, considérons une partie dénombrable (y_p) , $p \in \mathbb{N}$, dense dans la boule de $\mathbb{R}^h$ centrée en zéro et de rayon $\frac{1}{k}$, et une partie dénombrable (u_q) , $q \in \mathbb{N}$, dense dans K . On peut écrire :

$$G_k = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \left\{ x \in X \mid \left| f(x, Y(x) + y_p, u_q) - f(x, Y(x), u_q) \right| \leq \varepsilon \right\}$$

D'après le lemme 1.2, G_k est une intersection dénombrable d'ensembles mesurables, et est donc mesurable. Pour tout $\eta > 0$ arbitraire, il existe donc un entier k_0 tel que :

$$\nu(G_{k_0}) \geq \nu(X) - \frac{\eta}{2}.$$

On note F_n l'ensemble des $x \in X$ tels que $|Y_n(x) - Y(x)| \leq \frac{1}{k_0}$.

Par hypothèse, il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \nu(F_n) \geq \nu(X) - \frac{\eta}{2}$$

Il est clair que l'on a, d'une part :

$$\forall n \geq N, \quad \nu(G_{k_0} \cap F_n) \geq \nu(X) - \eta$$

et d'autre part, pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in G_{k_0} \cap F_n$:

$$\forall U \in \mathcal{U}, \quad |f(x, Y(x), U(x)) - f(x, Y_n(x), U(x))| \leq \varepsilon$$

Comme ε et η sont arbitraires, la suite $f(Y_n, U)$ converge en mesure vers $f(Y, U)$.

Théorème 1.4. On suppose qu'il existe dans l'intervalle $[1, +\infty[$ deux nombres p et q tels que pour tout Y de $L_h^p(X)$ et tout U de $\mathcal{U}$, la fonction $f(Y, U)$ soit dans $L^q(X)$. Alors l'ensemble $\{f(., U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ est une famille équicontinue d'applications de $L_h^p(X)$ dans $L^q(X)$.

Démonstration

a) Supposons d'abord que $f(0, U) = 0$ pour tout U de $\mathcal{U}$, et montrons l'équicontinuité en zéro. Si la famille $f(., U)$ n'était pas équicontinue en zéro, il existerait un nombre $a > 0$, une suite U_n , une suite Y_n convergeant vers zéro dans $L_h^p(X)$ tels que $\int |f(Y_n, U_n)|^q \nu \geq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut toujours supposer que $\sum_{n=1}^{\infty} \int |Y_n|^p \nu < +\infty$

Nous allons construire par récurrence une suite de nombres $\varepsilon_k \searrow 0$, de parties mesurables $G_k \subset X$, et une suite (Y_{n_k}, U_{n_k}) extraite de la suite (Y_n, U_n) , telles que les propriétés suivantes soient satisfaites :

$$(a) \quad \varepsilon_{k+1} < \frac{\varepsilon_k}{2}$$

$$(b) \quad \nu(G_k) < \varepsilon_k$$

$$(c) \quad \int_{G_k} |f(Y_{n_k}, U_{n_k})|^q \nu \geq \frac{2a}{3}$$

$$(d) \quad \text{pour toute partie mesurable } D \text{ de } X \text{ telle que } \nu(D) \leq 2\varepsilon_{k+1},$$

$$\text{on a } \int_D |f(Y_{n_k}, U_{n_k})|^q \nu < \frac{a}{3}$$

On prend $\varepsilon_1 = \nu(X)$, $G_1 = X$, $Y_{n_1} = Y_1$ et $U_{n_1} = U_1$. Supposons que l'on

ait $\varepsilon_k, G_k, Y_{n_k}$ et U_{n_k} . Alors $|f(Y_{n_k}, U_{n_k})|^q \in L^1(X)$, donc la mesure

$|f(Y_{n_k}, U_{n_k})|^q \nu$ est une mesure de base ν , et d'après la propriété de continuité absolue (BOURBAKI, [4], § 5, N°5, cor. 5), il existe un ε_{k+1} satisfaisant à (d). Comme $\int_{G_k} |f(Y_{n_k}, U_{n_k})|^q \nu \geq \frac{2a}{3}$, on en déduit que

$2\varepsilon_{k+1} < \nu(G_k) < \varepsilon_k$, d'où la condition (a). D'après le lemme 1.3, comme les

Y_n convergent en mesure vers zéro, et comme $F(0, U) = 0$ pour tout $U \in \mathcal{U}$, on peut trouver $n_{k+1} > n_k$ et G_{k+1} mesurable, tels que :

$$\nu(G_{k+1}) < \varepsilon_{k+1}$$

$$\forall x \notin G_{k+1}, \left| f(x, Y_{n_{k+1}}(x), U_{n_{k+1}}(x)) \right| < \left(\frac{a}{3 \text{ mes } X} \right)^{\frac{1}{q}}$$

La condition (b) est satisfaite, et la condition (c) est obtenue par :

$$\begin{aligned} \int_{G_{k+1}} |f(Y_{n_{k+1}}, U_{n_{k+1}})|^q \nu &= \int_X |f(Y_{n_{k+1}}, U_{n_{k+1}})|^q \nu - \int_{X \setminus G_{k+1}} |f(Y_{n_{k+1}}, U_{n_{k+1}})|^q \nu \\ &\geq \int_X |f(Y_{n_{k+1}}, U_{n_{k+1}})|^q \nu - \int_{X \setminus G_{k+1}} \left(\frac{a}{3 \text{ mes } X} \right)^q \nu \\ &\geq \int_X |f(Y_{n_{k+1}}, U_{n_{k+1}})|^q \nu - \frac{a}{3} \\ &\geq \frac{2a}{3} \end{aligned}$$

La construction est donc possible pour tout k . On a

$$\nu\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} G_i\right) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_i \leq 2\varepsilon_{k+1}$$

On considère alors les ensembles $D_k = G_k \cap \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} G_i\right)^c$. Il est clair que les D_k sont mesurables et disjoints deux à deux. On définit des applications Y et U de X dans $\mathbb{R}^h$ et K de la façon suivante :

$$Y(x) = \begin{cases} Y_{n_k}(x) & \text{si } x \in D_k \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} U_{n_k}(x) & \text{si } x \in D_k \\ u_0 \in K & \text{si } x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \end{cases}$$

Appliquons les hypothèses (c) et (d) :

$$\begin{aligned} \int_{D_k} |f(Y, U)|^q &= \int_{D_k} |f(Y_{n_k}, U_{n_k})|^q \\ &\geq \int_{G_k} |f(Y_{n_k}, U_{n_k})|^q - \int_{G_k \setminus D_k} |f(Y_{n_k}, U_{n_k})|^q \\ &\geq \frac{2a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3} \end{aligned}$$

Donc

$$\int |f(Y, U)|^q \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} |f(Y, U)|^q = +\infty$$

et $f(Y, U) \notin L^q(X)$. Par ailleurs :

$$\int |Y|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} |Y_{n_k}|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int |Y_n|^p < +\infty$$

donc $Y \in L_h^p(X)$. On est en contradiction avec l'hypothèse du théorème, ce qui établit par l'absurde l'équicontinuité en zéro dans le cas où $f(0, U) = 0$ pour tout U de $\mathcal{U}$.

b) Revenons au cas général, et montrons l'équicontinuité de $f(\cdot, U)$ en $Y_0 \in L_h^n(X)$.

Pour cela, on définit une application g de $X \times \mathbb{R}^h \times K$ dans $\mathbb{R}$ par la

formule :

$$g(x, y, u) = f(x, Y_0(x) + y, u) - f(x, Y_0(x), u)$$

La fonction g est de CARATHEODORY, et l'on a :

$$g(Y, U) = f(Y_0 + Y, U) - f(Y_0, U)$$

Donc, pour tout Y de $L_h^p(X)$ et tout U de $\mathcal{U}$, $g(Y, U)$ est dans $L^q(X)$, et l'on a même $g(0, U) = 0$ pour tout U de $\mathcal{U}$. D'après la première partie, $g(\cdot, U)$ est équicontinue en zéro, donc $f(\cdot, U)$ est équicontinue en Y_0 . 1

Le théorème 1.4 est inspiré d'un théorème de KRASNOSEL'SKII ([1], ch. I, th. 2.1), dont nous avons suivi de très près la démonstration. Dans la suite, pour vérifier l'hypothèse du théorème, nous ferons usage de la proposition suivante, dont la démonstration est immédiate.

Proposition 1.4. - Une condition suffisante pour que la fonction $f(Y, U)$ appartienne à $L^q(X)$ quels que soient $Y \in L_h^p(X)$ et $U \in \mathcal{U}$, est qu'il existe $a \in L^1(X)$ et un nombre $b \geq 0$ tels que :

$$\forall (x, y, u) \in X \times \mathbb{R}^h \times K, \quad |f(x, y, u)| \leq a(x) + b |y|^{\frac{p}{q}}$$

On peut même montrer, en modifiant de façon convenable le théorème 2.3 de KRASNOSEL'SKII, [1], Ch. I, que, si la mesure ν est sans atomes, la condition de la proposition 1.4 est non seulement suffisante, mais nécessaire. Nous ne le ferons pas, car la condition nécessaire ne nous servira pas dans la suite.

II - UN SYSTEME GOUVERNE PAR UNE EQUATION ELLIPTIQUE LINEAIRE

Soit $\bar{\Omega}$ une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^n$, compacte, de classe C^∞ , de dimension n . ⁽¹⁾ Son intérieur Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ qui sera muni de la mesure induite par la mesure de Lebesgue dx . Son bord F est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$, de classe C^∞ , de dimension $(n-1)$, qui sera muni de la mesure superficielle ds . Cette mesure superficielle peut être définie de plusieurs manières équivalentes ; nous dirons, par exemple, que c'est la dérivée-distribution de la fonction caractéristique de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$. On pourra appliquer à Ω et F les théorèmes 1.1 et 1.4.

Soit V un sous-espace vectoriel dense de $L_h^2(\Omega)$ tel que

(2.1) V est muni d'une forme quadratique définie positive, qui en fait
un espace de Hilbert

(2.2) l'injection de V dans $L_h^2(\Omega)$ est compacte.

Ainsi, par exemple, on peut prendre $V = W^{k,2}(\Omega)^h$ ou $V = W_0^{k,2}(\Omega)^h$.

Les hypothèses sont satisfaites d'après le théorème de RELICH-KONDRASHOV.

On identifie $L_h^2(\Omega)$ à son dual, ce qui donne

$$V \subset L_h^2(\Omega) \subset V'$$

chaque inclusion étant compacte et d'image dense. On se donne une forme bilinéaire continue a sur V , supposée coercive ; c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall \varphi \in V, \quad a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_V^2$$

On peut définir une application linéaire continue A de V dans V' par la formule :

$$\varphi, \psi \in V, \quad a(\varphi, \psi) = \langle A\varphi, \psi \rangle$$

Exemple 2.1. $V = W^{1,2}(\Omega)$, $h = 1$

Soient a_0 et a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) des fonctions de $L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$a_0(x) \geq \alpha \quad \text{p. p. sur}$$

⁽¹⁾ Note Nous ne cherchons pas les hypothèses minimales de régularité. Il est certain, en particulier, que l'hypothèse que $\bar{\Omega}$ soit de classe C^∞ peut être affaiblie.

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Alors, on peut définir une forme bilinéaire coercive sur V par :

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 \varphi \psi dx.$$

Exemple 2.2. $V = W_0^{1,2}(\Omega), \quad h = 1$

Sous les mêmes hypothèses, la forme bilinéaire

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx$$

est coercive sur V .

Pour poser notre problème de contrôle optimal, il nous faut définir les contrôles admissibles et le coût. Ils se décomposent en une partie distribuée et une partie frontière.

1. CONTROLE ET COUT DISTRIBUES

Soit K_{Ω} un compact métrisable fixe, et K_{Ω} une multi-application mesurable ⁽¹⁾ de Ω à valeurs dans les compacts non vides de K_{Ω} . Les contrôles distribués seront les sections mesurables de K_{Ω} au-dessus de Ω , soit :

$$\mathcal{U}_{\Omega} = \left\{ U : \Omega \longrightarrow K_{\Omega} \text{ mesurable } \mid U(x) \in K_{\Omega}(x) \quad \forall x \in \Omega \right\}$$

Soit γ_{Ω} une application de CARATHEODORY de $\Omega \times K_{\Omega}$ dans $[-1, 1]^h$. D'après le lemme 1.2, si $U \in \mathcal{U}_{\Omega}$, l'application :

$$\gamma_{\Omega}(U) : x \longmapsto \gamma_{\Omega}(x, U(x))$$

est mesurable sur Ω .

Soient f une application de $\Omega \times \mathbb{R}^h \times K_{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, a_1 une

⁽¹⁾ Note La mesurabilité d'une multi-application est prise au sens de CASTAING, [5] et [7]. Dans le cas particulier qui nous intéresse, nous pouvons introduire l'ensemble $\mathcal{K}(K_{\Omega})$ des compacts non vides de K_{Ω} , et le munir de la distance de Hausdorff, qui en fait un compact métrisable. Alors K_{Ω} est mesurable si et seulement si elle est mesurable en tant qu'application de Ω dans $\mathcal{K}(K_{\Omega})$.

fonction de $L^1(\Omega)$ et b_1 un nombre positif. On suppose que :

$$(2.4) \quad \begin{cases} f(x, \dots) \text{ est continue pour tout } x \in \Omega \\ f(\cdot, y, u) \text{ est mesurable pour tout } (y, u) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{K}_\Omega \\ \forall (x, y, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^h \times \mathbb{K}_\Omega, |f(x, y, u)| \leq a_1(x) + b_1 |y|^2 \end{cases}$$

D'après la proposition 1.4, si $Y \in L_h^2(\Omega)$ et si U est mesurable, la fonction $f(Y, U)$ est intégrable sur X . La majoration (2.4) est même nécessaire, si l'on veut que $f(Y, U)$ soit intégrable pour tout Y et tout U .

2. CONTROLE ET COUT FRONTIERE

Si le contrôle ou le coût ont des parties frontières, nous sommes obligés de définir la trace sur F d'un élément de V . Nous supposons donc qu'il existe une application linéaire et continue T de V dans $L_h^2(F)$, et que si

$$\varphi \in V \cap C^\infty(\bar{\Omega}), \quad T\varphi = \varphi|_F.$$

Nous appellerons $T\varphi$ la trace de φ sur F , et nous ferons l'hypothèse suivante :

$$(2.5) \quad \text{l'application } T \text{ de } V \text{ dans } L_h^2(F) \text{ est compacte.}$$

Ainsi, par exemple, les espaces $W^{k,2}(\Omega)^h$ ont cette propriété.

Dans la suite, nous noterons x les points de Ω et s les points de F , $\int dx$ l'intégrale de Lebesgue sur Ω et $\int ds$ l'intégrale superficielle sur F . Quand aucune confusion ne sera à craindre, nous écrirons $y(s)$, $s \in F$, au lieu de $Ty(s)$, $s \in F$, la trace sur F d'une fonction $y \in V$.

Nous définissons le contrôle et le coût frontière de la façon suivante. Soit $\mathbb{K}_F$ un compact métrisable fixe, et K_F une multi-application mesurable de F à valeurs dans les compacts non vides de $\mathbb{K}_F$. Les contrôles frontières seront les sections mesurables de K_F au-dessus de F , soit :

$$\mathcal{U}_F = \left\{ V : F \longrightarrow \mathbb{K}_F \text{ mesurable} \mid V(s) \in K_F(s) \quad \forall s \in F \right\}$$

Soit γ_F une application de CARATHÉODORY de $F \times \mathbb{K}_F$ dans $[-1, 1]^h$.

D'après le lemme 1.2, si $V \in \mathcal{U}_F$, l'application :

$$\gamma_F(U) : s \longmapsto \gamma_F(s, V(s))$$

est mesurable sur F .

Soient $g(s,y,v)$ une application de $F \times \mathbb{R}^h \times K_F$ dans $\mathbb{R}$, a_2 une fonction de $L^1(F)$ et b_2 un nombre positif. On suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(s, \dots) \text{ est continue pour tout } s \in F. \\ g(\cdot, y, v) \text{ est mesurable pour tout } (y, v) \in \mathbb{R}^h \times K_F \\ \forall (s, y, v) \in F \times \mathbb{R}^h \times K_F, \quad |g(s, y, v)| \leq a_2(s) + b_2 |y|^2 \end{array} \right.$$

3. LE PROBLEME DE CONTROLE

On se pose le problème de contrôle optimal suivant appelé problème original. Les contrôles admissibles, seront les couples $(U, V) \in \mathcal{U}_\Omega \times \mathcal{U}_F$. Quand un contrôle admissible (U, V) est donné, on lui associe l'état $Y_{U,V} \in \mathbb{W}$, solution unique de l'équation d'état :

$$\forall \varphi \in \mathbb{V}, \quad a(Y, \varphi) = \langle \Psi, \varphi \rangle + \int_{\Omega} \gamma_{\Omega}(x, U(x)) \varphi(x) dx + \int_F \gamma_F(s, V(s)) \varphi(s) ds$$

où Ψ est un élément fixe de $\mathbb{V}'$. Cette équation pourra s'écrire également :

$$AY = \Psi + \gamma_{\Omega}(U) + {}^t_T(\gamma_F(V))$$

On sait (J.L.LIONS, [1]) que l'application qui au second membre de l'équation d'état associe sa solution Y est linéaire et continue de $\mathbb{V}'$ dans $\mathbb{W}$. Nous dirons qu'un triplet (U, V, Y) est admissible si le contrôle (U, V) est admissible et si $Y = Y_{U,V}$ est la solution correspondante de l'équation d'état.

Le coût associé à un contrôle admissible (U, V) et un état Y est donné par :

$$(2.6) \quad I(Y, U, V) = \int_{\Omega} f(x, Y(x), U(x)) dx + \int_F g(s, Y(s), V(s)) ds.$$

Le problème original consiste à minimiser le coût sur l'ensemble des (U, V, Y) admissibles, ou encore, à minimiser $I(Y_{U,V}, U, V)$ sur l'ensemble des contrôles admissibles. Nous le noterons sous l'une des deux formes concises suivantes :

$$(P.O) \left\{ \begin{array}{l} U(x) \in K_{\Omega}(x) \quad \forall x \in \Omega \\ V(s) \in K_F(s) \quad \forall s \in F \\ \forall \varphi \in \mathbb{V}, \quad a(Y, \varphi) = \langle \Psi, \varphi \rangle + \int_{\Omega} \gamma_{\Omega}(x, U(x)) \varphi(x) dx + \int_F \gamma_F(s, V(s)) \varphi(s) ds \\ \text{minimiser} \left[\int_{\Omega} f(x, Y(x), U(x)) dx + \int_F g(s, Y(s), V(s)) ds \right] \end{array} \right.$$

$$(P.O) \begin{cases} U \in \mathcal{U}_\Omega, & V \in \mathcal{U}_F, & Y \in W \\ AY = \Psi + \gamma_\Omega(U) + t_T(\gamma_F(V)) \\ \text{minimiser } I(Y, U, V) \end{cases}$$

4. DEUX EXEMPLES

Si par exemple on prend $W = W_0^{1,2}(\Omega)^h$, on peut traiter le problème de Dirichlet. En prenant $h=1$ et A comme dans l'exemple 2.2, en prenant $\Psi \in L^2(\Omega)$, $Y_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, le problème à contrôle distribué s'écrit :

$$\begin{cases} U \in \mathcal{U}_\Omega, & Y \in W_0^{1,2}(\Omega)^h \\ AY = -AY_0 + \Psi + \gamma_\Omega(U) \text{ dans } W' \\ \text{minimiser } II(Y, U) \end{cases}$$

ou encore, en posant $Y + Y_0 = Z$:

$$\begin{cases} U \in \mathcal{U}_\Omega, & Z \in W^{1,2}(\Omega) \\ Z|_F = Y_0|_F \\ - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial Z}{\partial x_j}) = \Psi + \gamma_\Omega(U) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \text{minimiser } I(Z - Y_0, U) \end{cases}$$

Si on prend $W = W^{1,2}(\Omega)^h$, on peut traiter le problème de Neumann.

En prenant $h=1$ et A comme dans l'exemple 2.3, en prenant $\Psi \in L^2(F)$ et $\bar{\Phi} \in L^2(F)$, le problème s'écrit :

$$\begin{cases} U \in \mathcal{U}_\Omega, & V \in \mathcal{U}_F, & Y \in W^{1,2}(\Omega) \\ - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial Y}{\partial x_j}) + a_0 Y = \Psi + \gamma_\Omega(U) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \frac{\partial Y}{\partial \nu_A} = \bar{\Phi} + \gamma_F(V) \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(F) \\ \text{minimiser } I(Y, U, V) \end{cases}$$

5. UNE PROPRIÉTÉ D'EQUICONTINUITÉ

Proposition 2.1. - Soit $\mathcal{B}$ un borné de V que l'on munit de la topologie induite par $\sigma(V, V')$. Les familles d'applications de $\mathcal{B}$ dans R :

$$(2.7) \quad \left\{ Y \mapsto \int_{\Omega} f(x, Y(x), U(x)) dx \mid U \in \mathcal{U}_{\Omega} \right\}$$

$$(2.8) \quad \left\{ Y \mapsto \int_F g(s, Y(s), V(s)) ds \mid V \in \mathcal{U}_F \right\}$$

sont équicontinues.

La démonstration fait usage du lemme suivant :

Lemme 2.2. Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels localement convexes et séparés, et u une application linéaire continue de E_1 dans E_2 . On suppose E_1 réflexif et u compacte. Alors la restriction de u à tout borné $\mathcal{B}$ de E_1 reste continue lorsqu'on munit E_1 de la topologie affaiblie $\sigma(E_1, E_1')$.

Démonstration

Appelons $\widehat{\mathcal{B}}$ l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{B}$ dans E_1 . C'est une partie bornée et $\sigma(E_1, E_1')$ -compacte. Comme u est faiblement continue, $u(\widehat{\mathcal{B}})$ sera $\sigma(E_2, E_2')$ -compact ; en particulier $u(\widehat{\mathcal{B}})$ est fermé dans E_2 . Comme u est compacte, $u(\widehat{\mathcal{B}})$ sera relativement compact dans E_2 . Finalement $u(\widehat{\mathcal{B}})$ est compact dans E_2 .

Munissons $\widehat{\mathcal{B}}$ de la topologie induite par $\sigma(E_1, E_1')$ et $u(\widehat{\mathcal{B}})$ de la topologie induite par E_2 . La restriction de u à $\widehat{\mathcal{B}}$ envoie alors le compact $\widehat{\mathcal{B}}$ dans le compact $u(\widehat{\mathcal{B}})$, et pour montrer qu'elle est continue, il suffit de montrer que son graphe est fermé. Si donc x tend vers x_0 dans $\widehat{\mathcal{B}}$ et si $u(x)$ tend vers y_0 dans $u(\widehat{\mathcal{B}})$, alors x tend vers x_0 dans E_1 faible, par continuité faible $u(x)$ tend vers $u(x_0)$ dans E_2 faible, donc nécessairement $y_0 = u(x_0)$. ■

Démonstration de la proposition 2.1.

Par hypothèse, l'injection de V dans $L^2(\Omega)^h$ et la trace de V dans $L^2(F)^h$ sont compactes. Le lemme précédent s'applique, et les restrictions à $\mathcal{B}$ de ces applications sont donc continues pour la topologie induite par $\sigma(V, V')$.

Il suffit alors de vérifier que les familles d'applications (2.7) et (2.8) sont équicontinues de $L^2(\Omega)^h$ et $L^2(F)^h$ dans R . C'est exactement le théorème 1.4 avec $p=2$ et $q=1$. ■

III - CHANGEMENT DE CONTROLE = UN PROBLEME EQUIVALENT

Le but de ce paragraphe est de se ramener à un système plus simple, en prenant comme nouveaux contrôles $\gamma_\Omega(u)$ et $\gamma_F(v)$.

Pour cela, on pose :

$$(3.1) \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad \Gamma_\Omega(x) = \gamma_\Omega(x, K_\Omega(x)) .$$

$$(3.2) \quad \text{pour } s \in F, \quad \Gamma_F(s) = \gamma_F(s, K_F(s))$$

On définit ainsi deux multi-applications Γ_Ω et Γ_F de Ω dans $[-1, 1]^h$ et F dans $[-1, 1]^h$ respectivement.

Lemme 3.1. Les multi-applications Γ_Ω et Γ_F sont mesurables à valeurs dans les compacts non vides de $[-1, 1]^h$

Démonstration

Faisons la démonstration pour Γ_Ω . D'après le théorème de SCORZA DRAGONI (CASTAING, [5], théorème 3.1), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie compacte H de Ω telle que :

$$\text{mes}(\Omega \setminus H) \leq \varepsilon$$

$$\gamma_\Omega|_{H \times K} \quad \text{est continue}$$

En composant par la multi-application mesurable K_Ω , et en appliquant le théorème 4.4 de CASTAING, [5], on obtient :

$$\Gamma_\Omega|_H \quad \text{est mesurable}$$

et comme ε est arbitraire, Γ_Ω est mesurable sur Ω . ■

On notera respectivement $\int_\Omega$ et $\int_F$ l'ensemble des sections mesurables de Γ_Ω et Γ_F au-dessus de Ω et F

$$(3.3) \quad \int_\Omega = \left\{ Q : \Omega \longrightarrow [-1, 1]^h \text{ mesurable} \mid Q(x) \in \Gamma_\Omega(x) \quad \forall x \in \Omega \right\}$$

$$(3.4) \quad \int_F = \left\{ R : F \longrightarrow [-1, 1]^h \text{ mesurable} \mid R(s) \in \Gamma_F(s) \quad \forall s \in F \right\}$$

Lemme 3.2 $\int_\Omega = \gamma_\Omega(\mathcal{U}_\Omega) \quad \text{et} \quad \int_F = \gamma_F(\int_F)$

Démonstration

Faisons la démonstration pour $\int_\Omega$. Si $U \in \mathcal{U}_\Omega$, U est par définition une

section mesurable de K_Ω , et $\gamma_\Omega(U)$ est par définition une section de Γ_Ω , mesurable en vertu du lemme 1.2. Donc $\gamma_\Omega(\mathcal{U}_\Omega) \subset \mathcal{I}_\Omega$.

Pour montrer que $\mathcal{I}_\Omega \subset \gamma_\Omega(\mathcal{U}_\Omega)$, il faut montrer que toute section mesurable de Γ_Ω provient d'une section mesurable de K_Ω . Pour cela, nous nous fixons $q \in \mathcal{I}_\Omega$, et nous envisageons la multi-application

$$\Sigma : x \mapsto \left\{ u \in K_\Omega(x) \mid \gamma_\Omega(x, u) = q(x) \right\}$$

Elle est mesurable à valeurs compactes d'après le théorème 4.7' de CASTAING, [5], non vides à cause de (3.1). Elle possède donc au moins une section mesurable U , et l'on a bien :

$$U(x) \in K_\Omega(x) \quad \text{et} \quad \gamma_\Omega(x, U(x)) = q(x) \quad \forall x \in \Omega$$

A présent, pour x et y fixés dans Ω et $\mathbb{R}^h$, nous définissons une application $\bar{f}(x, y)(\cdot)$ de $\mathbb{R}^h$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ par la formule

$$(3.5) \quad \begin{cases} \text{si } q \in \Gamma_\Omega(x), \bar{f}(x, y)(q) = \min \left\{ f(x, y, u) \mid u \in K_\Omega(x) \text{ et } \gamma_\Omega(x, u) = q \right\} \\ \text{si } q \notin \Gamma_\Omega(x), \bar{f}(x, y)(q) = +\infty \end{cases}^{(1)}$$

Il est clair que la borne inférieure de la fonction continue $f(x, y, \cdot)$ sur le compact $K_\Omega(x) \cap \left\{ u \mid \gamma_\Omega(x, u) = q \right\}$ est atteinte, et de (2.4) découle aussitôt la majoration :

$$(3.6) \quad \forall (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^h, \forall q \in \Gamma_\Omega(x), \left| \bar{f}(x, y)(q) \right| \leq a_1(x) + b_1 |y|^2$$

Lemme 3.3. Si $Y \in \mathcal{W}$ et si $Q \in \mathcal{I}_\Omega$, il existe $\bar{U} \in \mathcal{U}_\Omega$ tel que :

$$(3.7) \quad \forall x \in \Omega, \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) = f(x, Y(x), \bar{U}(x))$$

et l'on a :

$$\int_{\Omega} \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) dx = \min \left\{ \int_{\Omega} f(x, Y(x), U(x)) dx \mid U \in \mathcal{U}_\Omega, Q = \gamma_\Omega(U) \right\}$$

Démonstration

Prolongeons la démonstration du lemme 3.2. En appliquant les théorèmes 4.5' et 4.7' de CASTAING, [5], on voit que l'application :

⁽¹⁾ Note Par convention, si A est une partie de $\mathbb{R}$, nous noterons $\min \{ x \mid x \in A \}$ la borne inférieure de l'ensemble A , lorsqu'elle est atteinte. Si elle n'est pas atteinte, ou si on n'en sait rien, on la notera $\inf \{ x \mid x \in A \}$

$$(3.8) \quad x \mapsto \min \left\{ f(x, Y(x), u) \mid u \in \Sigma(x) \right\} = \bar{f}(x, Y(x))(Q(x))$$

est mesurable, et que la multi-application

$$\Phi: x \mapsto \left\{ u \in \Sigma(x) \mid f(x, Y(x), u) = \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) \right\}$$

à valeurs compactes non vides, l'est aussi. Si $\bar{U}$ est une section mesurable de

$$\Phi, \quad \bar{U} \in \mathcal{U}_\Omega, \quad \gamma_\Omega(\bar{U}) = Q, \quad \text{et} \quad :$$

$$(3.9) \quad \forall x \in \Omega, \quad \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) = f(x, Y(x), \bar{U}(x))$$

Le second membre est intégrable, donc le premier l'est aussi.

D'après la définition (3.5) :

$$\forall U \in \mathcal{U}_\Omega: \gamma_\Omega(U) = Q, \quad f(x, Y(x), U(x)) \geq \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) \quad \forall x \in \Omega$$

$$(3.10) \quad \int_\Omega \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) dx \leq \inf \left\{ \int_\Omega f(x, Y(x), U(x)) dx \mid U \in \mathcal{U}_\Omega, \gamma_\Omega(U) = Q \right\}$$

D'après (3.9)

$$(3.11) \quad \int_\Omega \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) dx = \int_\Omega f(x, Y(x), \bar{U}(x)) dx, \quad \bar{U} \in \mathcal{U}_\Omega, \quad \gamma_\Omega(\bar{U}) = Q$$

En rassemblant (3.10) et (3.11), on voit que la borne inférieure dans (3.10) est atteinte en $\bar{U}$, ce qui s'écrit :

$$\int_\Omega \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) dx = \min \left\{ \int_\Omega f(x, Y(x), U(x)) dx \mid U \in \mathcal{U}_\Omega, \gamma_\Omega(U) = Q \right\} . \quad \blacksquare$$

De même, pour s et y fixés dans F et $\mathbb{R}^h$, l'on définit une application

$\bar{g}(s, y)(\cdot)$ de $\mathbb{R}^h$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ par la formule :

$$(3.12) \quad \begin{cases} \text{si } r \in \Gamma_F(s), & \bar{g}(s, y)(r) = \min \left\{ g(s, y, v) \mid v \in K_F(s) \text{ et } \gamma_F(s, v) = r \right\} \\ \text{si } r \notin \Gamma_F(s), & \bar{g}(s, y)(r) = +\infty \end{cases}$$

On démontre le lemme 3.3 bis :

Lemme 3.3 bis Si $Y \in W$ et $R \in \int_F$ il existe $\bar{V} \in \mathcal{U}_F$ tel que

$$\bar{g}(s, Y(s))(R(s)) = g(s, Y(s), \bar{V}(s)) \quad \forall s \in F$$

et l'on a :

$$\int_F \bar{g}(s, Y(s))(R(s)) ds = \min \left\{ \int_F g(s, Y(s), V(s)) ds \mid V \in \mathcal{U}_F, R = \gamma_F(V) \right\}$$

Nous sommes maintenant en mesure de nous poser un nouveau problème de contrôle.

Les contrôles admissibles seront les couples $(Q, R) \in \int_\Omega \times \int_F$. L'état Y

correspondant à un contrôle admissible (Q,R) sera noté abusivement $Y_{Q,R}^{(1)}$, et sera la solution de l'équation :

$$\forall \varphi \in V, \quad a(Y, \varphi) = \langle \Psi, \varphi \rangle + \int_{\Omega} Q(x) \varphi(x) dx + \int_F R(s) \varphi(s) ds$$

Le coût associé à un contrôle admissible (Q,R) et un état Y sera

$$\int_{\Omega} \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) dx + \int_F \bar{g}(s, Y(s))(R(s)) ds$$

On note le problème sous la forme concise :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega, Q(x) \in \Gamma_{\Omega}(x) \\ \forall s \in F, R(s) \in \Gamma_F(s) \\ \forall \varphi \in V, a(Y, \varphi) = \langle \Psi, \varphi \rangle + \int_{\Omega} Q(x) \varphi(x) dx + \int_F R(s) \varphi(s) ds \\ \text{minimiser} \left[\int_{\Omega} \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) dx + \int_F \bar{g}(s, Y(s))(R(s)) ds \right] \end{array} \right.$$

Des lemmes 3.3 et 3.3 bis découle aussitôt la proposition suivante :

Proposition 3.4. Si (Q,R) est un contrôle admissible du problème (3.13) il existe un contrôle admissible (U,V) du problème original tel que :

$$Q = \gamma_{\Omega}(U), \quad R = \gamma_F(V), \quad Y_{Q,R} = Y_{U,V}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) dx &= \int_{\Omega} f(x, Y(x), U(x)) dx \\ \int_F \bar{g}(s, Y(s))(R(s)) ds &= \int_F g(s, Y(s), V(s)) ds \end{aligned}$$

Réciproquement, si (U,V) est un contrôle admissible du problème original, alors un contrôle admissible du problème (3.13) est donné par

$$Q = \gamma_{\Omega}(U), \quad R = \gamma_F(V)$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} Y_{Q,R} &= Y_{U,V} \\ \int_{\Omega} \bar{f}(x, Y(x))(Q(x)) dx &\leq \int_{\Omega} f(x, Y(x), U(x)) dx \\ \int_F \bar{g}(s, Y(s))(R(s)) ds &\leq \int_F g(s, Y(s), V(s)) ds \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Note Il n'y aura pas de risque de confusion entre $Y_{U,V}$, état associé à un contrôle (U,V) du problème original, et $Y_{Q,R}$, état associé à un contrôle (Q,R) du problème (3.13) .

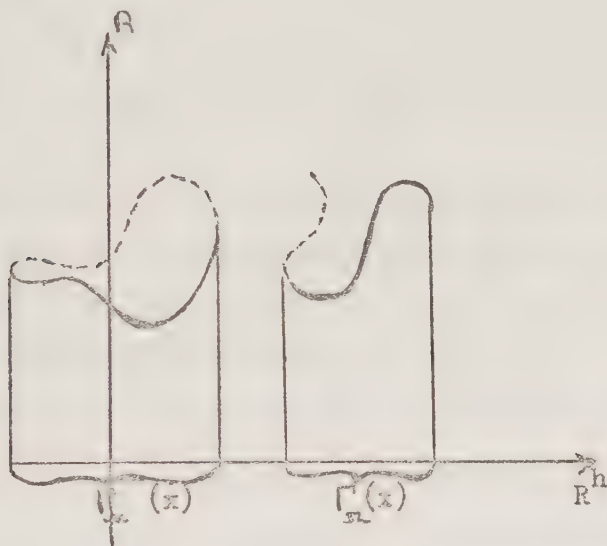
Proposition 3.5 L'application $(Q,R) \mapsto Y_{Q,R}$ est linéaire continue de $L_h^2(\Omega) \times L_h^2(F)$ dans V .

Démonstration

L'opérateur A est une bijection continue de V sur V' . D'après le théorème de l'homomorphisme de Banach, c'est un isomorphisme, et A^{-1} est continue de V' dans V . Par ailleurs, l'injection de $L_h^2(\Omega)$ dans V' et l'application transposée tT de $L_h^2(F)$ dans V' sont continues. Donc l'application

$$(Q,R) \mapsto Y_{Q,R} = A^{-1}(\Psi + Q + {}^tT(R))$$

est continue de $L_h^2(\Omega) \times L_h^2(F)$ dans V . ■



———— = graphe de $\bar{f}(x,y)(.)$

----- = image de $K_{\Omega}(x)$ dans $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}$
par l'application

$$u \longrightarrow (\gamma_{\Omega}(x,u), f(x,y,u))$$

IV - RELAXATION DU PROBLEME DE CONTROLE

Les hypothèses faites ne permettent pas d'assurer l'existence d'une solution optimale pour le problème originel, c'est-à-dire d'un triplet $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{Y})$ tel que :

$$\bar{Y} = Y_{\bar{U}, \bar{V}}, \bar{U} \in \mathcal{U}_{\Omega}, \bar{V} \in \mathcal{U}_F$$

$$I(\bar{Y}, \bar{U}, \bar{V}) = \inf \left\{ I(Y, U, V) \mid Y = Y_{U, V}, U \in \mathcal{U}_{\Omega}, V \in \mathcal{U}_F \right\}$$

On verra au paragraphe VIII un exemple explicite d'un problème sans solution optimale ; c'est le cas général. Il en est a fortiori de même pour le problème (3.13).

Par contre, il existe toujours des suites minimisantes, c'est-à-dire des suites (U_n, V_n, Y_n) telles que :

$$Y_n = Y_{U_n, V_n}$$

$$I(Y_n, U_n, V_n) \longrightarrow \inf \left\{ I(Y, U, V) \mid Y = Y_{U, V}, U \in \mathcal{U}_{\Omega}, V \in \mathcal{U}_F \right\}$$

On pourra appeler valeur du problème cette borne inférieure.

On verra dans ce paragraphe que, sous les hypothèses faites, elle est nécessairement finie. Notre but est de construire un second problème de contrôle, que l'on appellera problème relaxé, tel que :

- (a) le problème relaxé ait une solution optimale au moins
- (b) la valeur du problème relaxé soit égale à la valeur du problème originel
- (c) les solutions optimales du problème relaxé coïncident avec les points d'adhérence des suites minimisantes du problème originel.

Tout cela sera précisé par l'énoncé des théorèmes. Nous voulons simplement nous placer dans une ligne de pensée marquée par L.YOUNG ([1], [2], [3]), E. MAC SHANE ([1]), R. CAMPBELL ([1]), J. WARD ([1]), L. CESARI ([2], [6]), A. GHUILLA-MOURI ([1]), A. LOPEZ et V. TIKHOMIROV ([1]). Nous marquerons à l'occasion les similitudes avec l'une ou l'autre formulation de ces auteurs.

Notons $\hat{\Gamma}_{\Omega}(x)$ et $\hat{\Gamma}_F(s)$ les enveloppes convexes de $\Gamma_{\Omega}(x)$ et $\Gamma_F(s)$ dans $\mathbb{R}^h$. On obtient ainsi deux multi-applications $\hat{\Gamma}_{\Omega}$ et $\hat{\Gamma}_F$, à valeurs convexes compactes non vides dans $[-1, 1]^h$, et on notera $\int_{\Omega}$ et $\int_F$ l'ensemble des sections mesurables de $\hat{\Gamma}_{\Omega}$ et $\hat{\Gamma}_F$ au-dessus de Ω et F .

$$\hat{\int}_{\Omega} = \left\{ Q : \Omega \rightarrow [-1, 1]^h \text{ mesurable} \mid Q(x) \in \hat{\Gamma}_{\Omega}(x) \quad \forall x \in \Omega \right\}$$

$$\hat{\int}_F = \left\{ R : F \rightarrow [-1, 1]^h \text{ mesurable} \mid R(s) \in \hat{\Gamma}_F(s) \quad \forall s \in F \right\}$$

Pour x et y fixés, et en conformité avec les notations de MOREAU ([1]) et de ROCKAFELLAR, nous notons $\bar{f}^{**}(x,y)(.)$ la plus grande fonction convexe semi-continue inférieurement de $\mathbb{R}^h$ dans $\mathbb{R}$, majorée par $\bar{f}(x,y)(.)$ sur $\mathbb{R}^h$, et nous l'appellerons la régularisée de $\bar{f}(x,y)(.)$. C'est aussi l'enveloppe supérieure de la famille des fonctions affines continues sur $\mathbb{R}^h$ minorant $\bar{f}(x,y)(.)$. Notons $\mathcal{M}_f(x,y)$ cette famille :

$$\mathcal{M}_f(x,y) = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R} \mid \forall p \in \mathbb{R}^h, \langle a, p \rangle + b \leq f(x,y)(p) \right\}$$

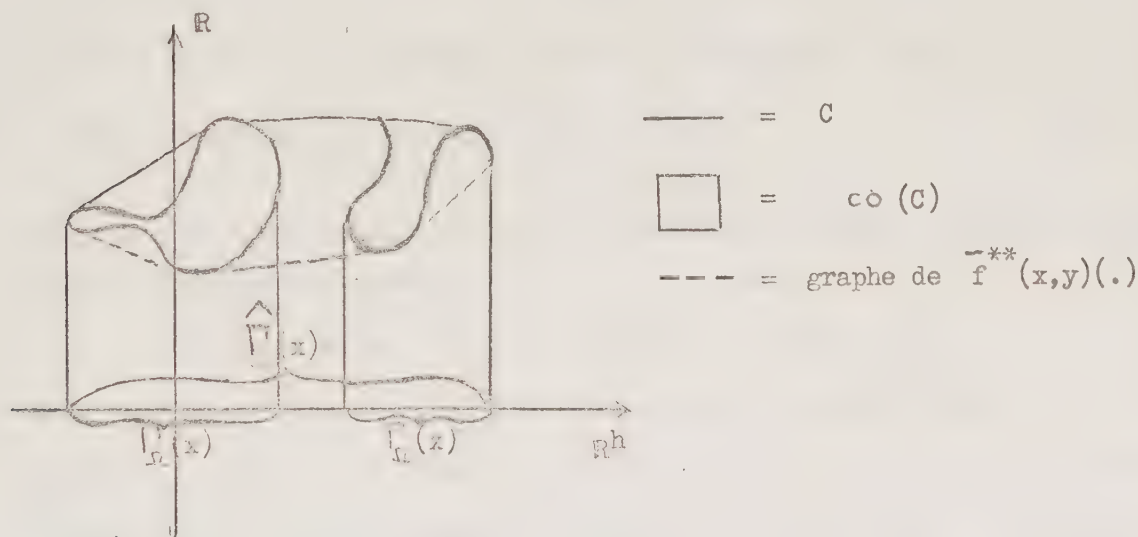
il est clair qu'on a aussi :

$$\mathcal{M}_f(x,y) = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R} \mid \forall u \in K_{\Omega}(x), \langle a, \gamma_{\Omega}(x,u) \rangle + b \leq f(x,y,u) \right\}$$

On a, par définition :

$$\forall q \in \mathbb{R}^h, \bar{f}^{**}(x,y)(q) = \sup \left\{ \langle a, q \rangle + b \mid (a,b) \in \mathcal{M}_f(x,y) \right\}$$

La régularisée $\bar{f}^{**}(x,y)(.)$ peut être construite de façon simple.



Considérons l'application de $K_{\Omega}(x)$ dans $\mathbb{R}^{h+1}$:

$$\chi : u \mapsto (\gamma_{\Omega}(x,u), f(x,y,u))$$

Elle est continue sur un compact. Soit $C = \chi(K_{\Omega}(x))$ son image dans $\mathbb{R}^{h+1}$. C'est un compact, et il en est de même de son enveloppe convexe $co(C)$. La projection horizontale de C est $\Gamma_{\Omega}(x)$, et la projection horizontale de

$\text{co}(C)$ est $\bigwedge_{\Omega} (x)$

Lemme 4.0 La fonction $\bar{f}^{**}(x,y)(.)$ est donnée par la formule :

$$\begin{cases} \forall q \in \bigwedge_{\Omega} (x), \bar{f}^{**}(x,y)(q) = \min \left\{ \eta \mid (q, \eta) \in \text{co}(C) \right\} \\ \forall q \notin \bigwedge_{\Omega} (x), \bar{f}^{**}(x,y)(q) = +\infty \end{cases}$$

Démonstration

Définissons une application k de $\mathbb{R}^h$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ par :

$$\forall q \in \mathbb{R}^h, k(q) = \inf \left\{ \eta \mid (q, \eta) \in \text{co}(C) \right\}$$

Il s'agit de prouver que k est la régularisée de $\bar{f}(x,y)(.)$. Pour cela, il suffit de montrer que k est convexe, semi-continue inférieurement de $\mathbb{R}^h$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, majorée par $\bar{f}(x,y)(.)$ et minorée par toute minorante affine de $\bar{f}(x,y)(.)$.

Pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in \bigwedge_2$, $q_1, q_2 \in \bigwedge_{\Omega} (x)$, on a, ^{par définition} ~~représentation~~ :

$$(q_1, k(q_1)) \in \text{co}(C)$$

$$(q_2, k(q_2)) \in \text{co}(C)$$

$$(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2, \alpha_1 k(q_1) + \alpha_2 k(q_2)) \in \text{co}(C)$$

$$k(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2) = \min \left\{ \eta \mid (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2, \eta) \in \text{co}(C) \right\}$$

$$k(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2) \leq \alpha_1 k(q_1) + \alpha_2 k(q_2)$$

Donc k est convexe. Pour la semi-continuité inférieure, il suffit de vérifier que l'épigraphe est fermé :

$$\text{épigraphe}(k) = \left\{ (q, \eta) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R} \mid \eta \geq k(q) \right\}$$

Soit donc une suite (q_n, η_n) de l'épigraphe convergeant vers (q, η) . La suite $(q_n, k(q_n))$ admet un point d'adhérence (q, α) dans le compact $\text{co}(C)$. Donc $\alpha \geq k(q)$. Comme $\eta_n \geq k(q_n) \forall n$, on obtient $\eta \geq \alpha$. Donc $\eta \geq k(q)$, et (q, η) appartient à l'épigraphe de k , qui est bien fermé.

Par construction $k(q) \leq \bar{f}(x,y)(q)$ pour tout q de $\mathbb{R}^h$.

Enfin, soient $(a,b) \in \mathcal{M}_f(x,y)$ les coefficients d'une fonction affine

minorant $f(x,y)(.)$:

$$\forall q \in \mathbb{R}^h, \langle a, q \rangle + b \leq \bar{f}(x,y)(q)$$

Alors le graphe de cette fonction est un hyperplan affine séparant $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}$ en deux demi-espaces fermés. Par hypothèse C est contenu dans le demi-espace supérieur ; il en est donc de même pour $c \circ (C)$, et par définition de k :

$$\forall q \in \hat{\Gamma}_{\Omega}(x), \langle a, q \rangle + b \leq k(q).$$

Si $q \notin \hat{\Gamma}_{\Omega}(x)$, $k(q) = +\infty$, et l'inégalité subsiste trivialement. Finalement :

$$\forall q \in \mathbb{R}^h, \langle a, q \rangle + b \leq k(q).$$

Nous allons établir cinq lemmes sur $\bar{f}^{**}$ qui nous serviront dans la suite. Notons $\mathcal{M}_+^1(K_{\Omega}(x))$ l'ensemble des mesures de Radon positives de masse 1 sur le compact $K_{\Omega}(x)$.

Lemme 4.1.

$$c \circ (C) = \left\{ \left(\int \gamma_{\Omega}(x,u) \lambda(du), \int f(x,y;u) \lambda(du) \right) \mid \lambda \in \mathcal{M}_+^1(K_{\Omega}(x)) \right\}$$

$$\bar{f}^{**}(x,y)(q) = \min \left\{ \int f(x,y,u) \lambda(du) \mid \lambda \in \mathcal{M}_+^1(K_{\Omega}(x)), \int \gamma_{\Omega}(x,u) \lambda(du) = q \right\}$$

Démonstration

La première égalité résulte de l'application à la fonction :

$$\chi: u \mapsto (\gamma_{\Omega}(x,u), f(x,y,u))$$

du théorème de représentation intégrale de BOURBAKI, [3], chapitre 3, § 3, N° 3, prop.5. La seconde égalité résulte de (4.5) où l'on a remplacé $c \circ (C)$ par sa représentation intégrale.

Lemme 4.2.

$$\forall q \in \hat{\Gamma}_{\Omega}(x), \bar{f}^{**}(x,y)(q) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i f(x,y,u_i) \right\}, \text{ pour}$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{h+1}) \in \Delta_{h+1}, u_i \in K_{\Omega}(x) \forall i, \text{ et } \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \gamma_{\Omega}(x,u_i) = q$$

Démonstration

D'après le lemme 4.0 :

$$(q, \bar{f}^{**}(x,y)(q)) \in c \circ (C)$$

$$(4.0) \quad \forall \varepsilon > 0, (q, \bar{f}^{**}(x,y)(q) - \varepsilon) \notin c \circ (C)$$

On introduit alors la facette de $(q, \bar{f}^{**}(x,y)(q))$ dans $\text{co}(C)$, soit F (cf. PALLU DE LA BARRIÈRE, [1]). D'après (4.0), ce ne peut être un point intérieur, F est donc un convexe compact de dimension h au plus. Les points extrémaux de F sont extrémaux dans $\text{co}(C)$, ce sont donc des éléments de C . Or F est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux (KREIN-MILMAN en dimension finie). Le théorème de CARATHÉODORY nous dit alors que tout point de F appartient à l'enveloppe convexe de $(h+1)$ points de C . On peut donc trouver $(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{h+1}) \in \bigwedge_{h+1}$, $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{h+1}$ dans $K_\Omega(x)$ tels que :

$$q = \sum_{i=1}^{h+1} \bar{\lambda}_i \gamma_\Omega(x, u_i) \text{ et } \bar{f}^{**}(x,y)(q) = \sum_{i=1}^{h+1} \bar{\lambda}_i f(x,y, u_i)$$

Par ailleurs, si $(\lambda_1, \dots, \lambda_{h+1}) \in \bigwedge_{h+1}$ et $(u_1, \dots, u_{h+1}) \in \Gamma_\Omega(x)^{h+1}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \gamma_\Omega(x, u_i), \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i f(x,y, u_i) \in \text{co}(C)$$

et, en vertu du lemme 4.0 :

$$\bar{f}^{**}(x,y)\left(\sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \gamma_\Omega(x, u_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i f(x,y, u_i)$$

Soit, si $\sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \gamma_\Omega(x, u_i) = q$,

$$\sum_{i=1}^{h+1} \bar{\lambda}_i f(x,y, u_i) \leq \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i f(x,y, u_i) .$$

Dorénavant, nous noterons $\tilde{\lambda}$ les éléments $(\lambda_1, \dots, \lambda_{h+1})$ de $\bigwedge_{h+1}$ et $\tilde{u}$ les éléments $(u_1, \dots, u_{h+1})$ de $(K_\Omega)^{h+1}$

Lemme 4.3 Si Y est une application mesurable de Ω dans $\mathbb{R}^h$ et Q une section mesurable de $\widehat{\Gamma}_\Omega$ au-dessus de Ω , l'application

$$x \mapsto \bar{f}^{**}(x, Y(x))(Q(x))$$

est mesurable

Démonstration

L'application :

$$\omega : (x, \tilde{\lambda}, \tilde{u}) \mapsto \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \gamma_\Omega(x, u_i)$$

est mesurable en x , continue en $(\tilde{\lambda}, \tilde{u})$. La multi-application :

$$\Delta : x \mapsto \bigwedge_{h+1} \times K_{\Omega}(x)^{h+1}$$

est mesurable à valeurs compactes non vides dans $R^{h+1} \times K_{\Omega}^{h+1}$. En appliquant le théorème 4.7' de CASTAING, [5], on en déduit que la multi-application :

$$\Sigma : x \mapsto \{(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in \Delta(x) \mid \omega(x, \tilde{\lambda}, \tilde{u}) = Q(x)\}$$

$$\Sigma : x \mapsto \{(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \mid \tilde{\lambda} \in \bigwedge_{h+1}, u_i \in K_{\Omega}(x) \forall i, \text{ et } \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \gamma_{\Omega}(x, u_i) = Q(x)\}$$

est mesurable à valeurs compactes, et non vides à cause du lemme 4.2. et de l'appartenance de $Q(x)$ à $\hat{\Gamma}_{\Omega}(x)$.

L'application :

$$\pi : (x, \tilde{\lambda}, \tilde{u}) \mapsto \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i f(x, Y(x), u_i)$$

est mesurable en x et continue en $(\tilde{\lambda}, \tilde{u})$. On peut donc appliquer le théorème 4.5' de CASTAING, [5], qui nous permet d'affirmer que l'application :

$$x \mapsto \min \{ \pi(x, \tilde{\lambda}, \tilde{u}) \mid (\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in \Sigma(x) \}$$

$$x \mapsto \min \left\{ \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i f(x, Y(x), u_i) \mid \tilde{\lambda} \in \bigwedge_{h+1}, u_i \in K_{\Omega}(x), \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \gamma_{\Omega}(x, u_i) = Q(x) \right\}$$

$$x \mapsto f^{**}(x, Y(x))(Q(x)) \quad (\text{par le lemme 4.2})$$

est mesurable.

Lemme 4.4. (Choix mesurable). Pour toute application mesurable Y de Ω dans R^h , pour toute fonction mesurable Q de Γ_{Ω} au-dessus de Ω , il existe des applications mesurables :

$$M_i : \Omega \rightarrow R \quad 1 \leq i \leq h+1$$

$$U_i : \Omega \rightarrow K_{\Omega} \quad 1 \leq i \leq h+1$$

telles que l'on ait, pour tout $x \in \Omega$:

$$(M_1(x), \dots, M_{h+1}(x)) \in \bigwedge_{h+1}$$

$$U_i(x) \in K_{\Omega}(x) \quad 1 \leq i \leq h+1$$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) \gamma_{\Omega}(x, U_i(x))$$

$$\bar{f}^{**}(x, Y(x))(Q(x)) = \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) f(x, Y(x), U_i(x))$$

Démonstration

Il suffit de prolonger la démonstration du lemme 4.3. On définit une multi-application sur Ω par :

$$\Theta(x) = \left\{ (\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in \Sigma(x) \mid \pi(x, \tilde{\lambda}, \tilde{u}) = \bar{f}^{**}(x, Y(x))(Q(x)) \right\}$$

$$\Theta(x) = \left\{ (\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in \Sigma(x) \mid \bar{f}^{**}(x, Y(x))(Q(x)) = \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i f(x, Y(x), u_i) \right\}$$

Elle est mesurable à valeurs compactes non vides d'après le théorème 4.7 de CASTAING, [5]. Elle possède donc des sections mesurables, et toute section mesurable $(M_i, U_i)_{i=1, \dots, h+1}$ répond à la question. $\square$

On appellera intérieur relatif de $\widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$, en abrégé $\text{ri}(\widehat{\Gamma}_{\Omega}(x))$, l'intérieur de $\widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$ relativement à la variété affine qu'il engendre.

Lemme 4.5. La fonction $\bar{f}^{**}(x, \cdot)(\cdot)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}^h \times \widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$, et est même continue sur $\mathbb{R}^h \times \text{ri}(\widehat{\Gamma}_{\Omega}(x))$. La fonction $\bar{f}^{**}(\cdot, y)(q)$ est mesurable sur Ω . On a :

$$(4.1) \quad \left| \bar{f}^{**}(x, y)(q) \right| \leq a_1(x) + b_1 |y|^2, \quad \forall u \in \widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$$

Démonstration

Le cylindre

$$\left\{ (q, \eta) \mid q \in \widehat{\Gamma}_{\Omega}(x), \quad |\eta| \leq a_1(x) + b_1 |y|^2 \right\}$$

est un convexe compact contenant C . Il contient donc $\text{co}(C)$, et la majoration (4.1) est alors une conséquence du lemme 4.0.

La fonction $\bar{f}^{**}(x, y)(\cdot)$ est convexe semi-continue inférieurement sur $\widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$, et est donc continue sur $\text{ri}(\widehat{\Gamma}_{\Omega}(x))$ (ROCKAFELLAR, [2])

Fixons x , et prenons $y_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Par compacité de $K_{\Omega}(x)$:

$$(4.2) \quad \exists \eta > 0 : |y - y_0| \leq \eta \implies |f(x, y, u) - f(x, y_0, u)| \leq \varepsilon \quad \forall u \in K_{\Omega}(x)$$

En appliquant le lemme 4.2 :

$$\forall q \in \widehat{\Gamma}_{\Omega}(x), \bar{f}^{**}(x, y_0)(q) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i f(x, y_0, u_i) \mid \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \gamma_{\Omega}(x, u_i) = q \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}^{**}(x, y_0)(q) \geq \min \left\{ \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i f(x, y, u_i) \mid \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \gamma_{\Omega}(x, u_i) = q \right\} + \\ + \inf \left\{ \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i (f(x, y_0, u_i) - f(x, y, u_i)) \mid \sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \gamma_{\Omega}(x, u_i) = q \right\} \end{aligned}$$

Donc, en appliquant (4.2) et de nouveau le lemme 4.2 :

$$|y - y_0| \leq \eta \implies \bar{f}^{**}(x, y_0)(q) \geq f^{**}(x, y)(q) - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \right) \quad \forall q \in \widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$$

En échangeant les rôles de y et y_0 , on montre que :

$$|y - y_0| \leq \eta \implies \bar{f}^{**}(x, y)(q) \geq f^{**}(x, y_0)(q) - \varepsilon \quad \forall q \in \widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$$

Soit enfin

$$(4.8) \quad |y - y_0| \leq \eta \implies |f^{**}(x, y)(q) - f^{**}(x, y_0)(q)| \leq \varepsilon \quad \forall q \in \widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$$

De l'égalité :

$$\bar{f}^{**}(x, y)(q) - \bar{f}^{**}(x, y_0)(q_0) = \bar{f}^{**}(x, y)(q) - \bar{f}^{**}(x, y_0)(q) + \bar{f}^{**}(x, y_0)(q) - \bar{f}^{**}(x, y_0)(q_0)$$

de la formule (4.3) (équicontinuité en y) et des propriétés de continuité de $\bar{f}^{**}(x, y_0)(.)$, découlent les propriétés de continuité voulues de $f^{**}(x, .)(.)$.

La mesurabilité en x est une conséquence du lemme 4.3. Il suffit de fixer $Y(x) = y$ et $U(x) = u \quad \forall x \in \Omega$ pour obtenir $\bar{f}^{**}(., y)(u)$ comme fonction mesurable. $\square$

Dans le cas où $h = 1$, on montre que $\bar{f}^{**}(x, y)(.)$ est continue sur $\widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$ et donc que $\bar{f}^{**}(x, .)(.)$ est continue sur $\mathbb{R}^h \times \widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$. C'est faux en général dès que $h \geq 2$.

En ce qui concerne le coût frontière, on notera $\bar{g}^{**}(s, y)(.)$ la plus grande fonction convexe semi-continue inférieurement de $\mathbb{R}^h$ dans $\mathbb{R}$, majorée par $\bar{g}(s, y)(.)$ sur $\mathbb{R}^h$, et nous l'appellerons la régularisée de $\bar{g}(s, y)(.)$. Cette fonction $\bar{g}(s, y)(.)$ satisfait à des lemmes 4.1 bis, 4.2 bis, 4.3 bis, 4.4 bis, 4.5 bis,

analogues aux précédents, et dont nous laissons l'énoncé au soin du lecteur.

Nous sommes enfin en mesure de considérer le problème de contrôle suivant, appelé problème relaxé sous la première forme, en abrégé problème (PR.1). Les contrôles admissibles seront les couples $(Q,R) \in \mathcal{J}_\Omega \times \mathcal{J}_F$. L'équation d'état est inchangée : c'est l'équation d'état du problème (3.13). Le coût associé à l'état Y et au contrôle admissible (Q,R) est donné par :

$$J_1(Y,Q,R) = \int_{\Omega} \bar{f}^{**}(x,Y(x))(Q(x))dx + \int_F \bar{g}^{**}(s,Y(s))(R(s))ds$$

D'après les lemmes 4.3 et 4.3 bis, et les majorations (4.1) et (4.1)bis, cette expression a un sens et est finie. On note le problème (PR 1) sous l'une des formes concises :

$$(PR\ 1) \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega, \quad Q(x) \in \hat{\Gamma}_\Omega(x) \\ \forall s \in F, \quad R(s) \in \hat{\Gamma}_F(s) \\ \forall \varphi \in V, \quad a(Y,\varphi) = \langle \Psi, \varphi \rangle + \int_{\Omega} Q(x) \varphi(x) dx + \int_F R(s) \varphi(s) ds \\ \text{minimiser} \left[\int_{\Omega} \bar{f}^{**}(x,Y(x))(Q(x))dx + \int_F \bar{g}^{**}(s,Y(s))(R(s))ds \right] \end{array} \right.$$

ou encore :

$$(PR\ 1) \left\{ \begin{array}{l} Q \in \hat{\mathcal{J}}_\Omega, \quad R \in \hat{\mathcal{J}}_F, \quad Y \in V \\ AY = \Psi + Q + {}^tT(R) \\ \text{minimiser} \quad J_1(Y,Q,R) \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant énoncer notre résultat principal et quelques conséquences immédiates. Sa démonstration va occuper tout le paragraphe V.

Théorème de relaxation. Le problème relaxé a une solution optimale au moins. La valeur du problème relaxé est égale à la valeur du problème original :

$$(4.4) \quad \inf(P0) = \min (PR\ 1)$$

Si (U_n, V_n, Y_n) est une suite minimisante du problème original, il existe une suite extraite $(U_{n'}, V_{n'}, Y_{n'})$ et une solution optimale (Q,R,Y) du problème

relaxé telles que :

$$(4.5) \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_{\Omega}(U_n) \longrightarrow Q & \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(\Omega), L_h^1(\Omega)) \\ \gamma_F(V_n) \longrightarrow R & \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(F), L_h^1(F)) \\ Y_n \longrightarrow Y & \text{pour } \sigma(V, V') \\ I(Y_n, U_n, V_n) \longrightarrow J_1(Y, Q, R) & \text{dans } R \end{array} \right.$$

Réciproquement, si (Q, R, Y) est une solution optimale du problème relaxé, il existe une suite minimisante (u_n, v_n, Y_n) du problème originel, telle que :

$$(4.6) \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_{\Omega}(U_n) \longrightarrow Q & \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(\Omega), L_h^1(\Omega)) \\ \gamma_F(V_n) \longrightarrow R & \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(F), L_h^1(F)) \\ Y_n \longrightarrow Y & \text{pour } \sigma(V, V') \\ I(Y_n, U_n, V_n) \longrightarrow J_1(Y, Q, R) & \text{dans } R \end{array} \right.$$

Corollaire 1. Munissons l'espace $L_h^{\infty}(\Omega) \times L_h^{\infty}(F) \times V$ de la topologie produit des topologies $\sigma(L_h^{\infty}(\Omega), L_h^1(\Omega))$, $\sigma(L_h^{\infty}(F), L_h^1(F))$, et $\sigma(V, V')$.

Alors l'ensemble des solutions optimales du problème relaxé est l'ensemble des points d'adhérence des $(\gamma_{\Omega}(U_n), \gamma_F(V_n), Y_n)$ où (U_n, V_n, Y_n) est une suite minimisante du problème originel.

Corollaire 2. De (4.5), on déduit que :

$$\gamma_{\Omega}(U_n) \longrightarrow Q \quad \text{pour } \sigma(L_h^2(\Omega), L_h^2(\Omega))$$

$$\gamma_F(V_n) \longrightarrow R \quad \text{pour } \sigma(L_h^2(F), L_h^2(F))$$

$$Y_n \longrightarrow Y \quad \text{dans } L_h^2(F)$$

$$TY_n \longrightarrow TY \quad \text{dans } L_h^2(F)$$

et de (4.6) on déduit que :

$$\gamma_{\Omega}(U_n) \longrightarrow Q \quad \text{pour} \quad \sigma(L_h^2(\Omega), L_h^2(\Omega))$$

$$\gamma_F(V_n) \longrightarrow R \quad \text{pour} \quad \sigma(L_h^2(F), L_h^2(F))$$

$$Y_n \longrightarrow Y \quad \text{dans} \quad L_h^2(\Omega)$$

$$TY_n \longrightarrow TY \quad \text{dans} \quad L_h^2(F)$$

Démonstration

Les topologies $\sigma(L_h^2, L_h^2)$ sont moins fines que les topologies $\sigma(L_h^{\infty}, L_h^1)$.

D'après la proposition (3.5), la suite Y_n tend vers Y dans V faible, et reste dans un borné $\mathcal{B}$ de V . D'après le lemme 2.2 les restrictions à $\mathcal{B}$ de l'injection de V dans $L_h^2(\Omega)$ et de l'application T de V dans $L_h^2(F)$ sont continues lorsqu'on munit V de la topologie affaiblie. D'où la conclusion.

Corollaire 3 . La valeur du problème original est finie :

$$-\infty < \inf (P;0) < +\infty$$

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de (4.14) :

$$\inf (P;0) = \min (PR 1) = J_1(Y, Q, R) .$$

L'idée de régulariser le coût par rapport au contrôle, c'est-à-dire de remplacer la fonction $f(x,y,u)$ par sa régularisée en u $\bar{f}^{**}(x,y)(u)$ a été introduite en théorie du contrôle optimal par A.IOFFE et V.TIHOMIROV, [1] .

V - DEMONSTRATION DU THEOREME DE RELAXATION

Pour $Y \in V$, $U \in \mathcal{U}_\Omega$, $V \in \mathcal{U}_F$, on pose :

$$(5.1) \quad M_Y(U) = \int_{\Omega} f(x, Y(x), U(x)) dx$$

$$(5.2) \quad N_Y(V) = \int_F g(s, Y(s), V(s)) ds$$

Pour $Y \in V$, nous définissons deux applications $\overline{M}_Y$ et $\overline{N}_Y$ de $L_h^2(\Omega)$ et $L_h^2(F)$ dans $\mathbb{R}$ par les formules :

$$(5.3) \quad \overline{M}_Y(Q) = \int_{\Omega} \overline{f}(x, Y(x))(Q(x)) dx$$

$$(5.4) \quad \overline{N}_Y(R) = \int_F \overline{g}(s, Y(s))(R(s)) ds$$

D'après les lemmes 3.3 et 3.3 bis, on a :

$$(5.5) \quad \begin{cases} \forall Q \in \mathcal{J}_\Omega & , \quad M_Y(Q) = \min \{ M_Y(U) \mid \gamma_\Omega(U) = Q \} \\ \forall Q \notin \mathcal{J}_\Omega & , \quad M_Y(Q) = +\infty \end{cases}$$

$$(5.6) \quad \begin{cases} \forall R \in \mathcal{J}_F & , \quad N_Y(R) = \min \{ N_Y(V) \mid \gamma_F(V) = R \} \\ \forall R \notin \mathcal{J}_F & , \quad N_Y(R) = +\infty \end{cases}$$

On pose enfin :

$$(5.7) \quad \overline{I}_Y(Q, R) = \overline{M}_Y(Q) + \overline{N}_Y(R)$$

On définit ainsi une application $\overline{I}_Y$ de $L_h^2(\Omega) \times L_h^2(F)$ dans $\mathbb{R}$. Il est normal de chercher sa régularisée $\overline{I}_Y^{**}$. Nous rappelons (MOREAU, [1]) que c'est la plus grande fonction convexe semi-continue inférieurement de $L_h^2(\Omega) \times L_h^2(F)$ dans $\mathbb{R}$ et majorée par $\overline{I}_Y$, ou encore l'enveloppe supérieure des fonctions affines continues majorées par $\overline{I}_Y$. Comme les variables se séparent, on a facilement :

$$(5.8) \quad \overline{I}_Y^{**}(Q, R) = \overline{M}_Y^{**}(Q) + \overline{N}_Y^{**}(R)$$

Lemme 5.1

$$\forall Y \in V, \quad \forall Q \in L_h^2(\Omega), \quad \forall R \in L_h^2(F)$$

$$(5.9) \quad \overline{M}_Y^{**}(Q) = \int_{\Omega} \overline{f}^{**}(x, Y(x))(Q(x)) dx$$

$$(5.10) \quad \bar{M}_Y^{**}(R) = \int_F \bar{g}^{**}(s, Y(s))(R(s)) ds$$

Démonstration

Nous faisons la démonstration pour $\bar{M}_Y$. Cherchons sa fonction polaire (KOREAU, [1]):

$$\text{pour } \psi \in L_h^2(\Omega), \quad \bar{M}_Y^*(\psi) = \sup \left\{ \langle \psi, q \rangle - \bar{M}_Y(q) \mid q \in L_h^2(\Omega) \right\}$$

En se servant de (5.5) :

$$\bar{M}_Y^*(\psi) = \sup \left\{ \langle \psi, \gamma_\Omega(u) \rangle - M_Y(u) \mid u \in \mathcal{U}_\Omega \right\}$$

$$(5.11) \quad \bar{M}_Y^*(\psi) = \sup \left\{ \int_\Omega \left[\psi(x) \cdot \gamma_\Omega(x, u(x)) - f(x, Y(x), u(x)) \right] dx \mid u \in \mathcal{U}_\Omega \right\}$$

Par ailleurs, on peut également chercher la fonction polaire de $\bar{f}(x, Y(x))(\cdot)$ sur $\mathbb{R}^h$:

$$\text{pour } p \in \mathbb{R}^h, \quad \bar{f}^*(x, Y(x))(p) = \sup \left\{ p \cdot q - \bar{f}(x, Y(x))(q) \mid q \in \mathbb{R}^h \right\}$$

En se servant de (3.5) :

$$(5.12) \quad \bar{f}^*(x, Y(x))(p) = \sup \left\{ p \cdot \gamma_\Omega(x, u) - f(x, Y(x), u) \mid u \in K_\Omega(x) \right\}$$

Notons ω l'application :

$$\omega : (x, u) \longmapsto \psi(x) \cdot \gamma_\Omega(x, u) - f(x, Y(x), u)$$

En remplaçant p par $\psi(x)$ dans 5.12, on obtient :

$$\bar{f}^*(x, Y(x))(\psi(x)) = \sup \left\{ \omega(x, u) \mid u \in K_\Omega(x) \right\}$$

Comme la multi-application K_Ω est mesurable à valeurs compactes non vides, et comme ω est continue en x et mesurable en u , on peut appliquer les théorèmes 4.5' et 4.7' de CASTAING [5], qui nous prouvent successivement que l'application :

$$(5.13) \quad x \longmapsto \bar{f}^*(x, Y(x))(\psi(x))$$

est mesurable, et que la multi-application :

$$(5.14) \quad x \longmapsto \left\{ u \in K_\Omega(x) \mid \omega(x, u) = \bar{f}^*(x, Y(x))(\psi(x)) \right\}$$

est mesurable à valeurs compactes non vides. Elle admet donc une section mesurable au-dessus de Ω , que je note $\bar{u} \in \mathcal{U}_\Omega$:

$$(5.15) \quad \bar{f}^*(x, Y(x))(\psi(x)) = \omega(x, \bar{U}(x)) \quad \forall x \in \Omega$$

$$(5.16) \quad \bar{f}^*(x, Y(x))(\psi(x)) = \psi(x) \cdot \chi_{\Omega}(x, \bar{U}(x)) - f(x, Y(x), \bar{U}(x))$$

D'où, en intégrant et en appliquant (5.11) :

$$(5.17) \quad \int_{\Omega} \bar{f}^*(x, Y(x))(\psi(x)) dx \leq \bar{M}_Y^*(\psi)$$

Par ailleurs, d'après (5.12) :

$$\forall U \in \mathcal{U}_{\Omega}, \quad \psi(x) \cdot \chi_{\Omega}(x, U(x)) - f(x, Y(x), U(x)) \leq \bar{f}^*(x, Y(x))(\psi(x))$$

et donc, d'après (5.11) :

$$(5.18) \quad \bar{M}_Y^*(\psi) \leq \int_{\Omega} \bar{f}^*(x, Y(x))(\psi(x)) dx$$

En comparant (5.18) et (5.17), on a :

$$\bar{M}_Y^*(\psi) = \int_{\Omega} \bar{f}^*(x, Y(x))(\psi(x)) dx$$

Il est bien connu que :

$$(5.19) \quad \bar{M}_Y^{**} = (\bar{M}_Y^*)^*$$

$$(5.20) \quad \bar{f}^{**}(x, y) = (\bar{f}^*(x, y))^*$$

On va donc reprendre les polaires. La fonction :

$$(x, p) \longmapsto \bar{f}^*(x, Y(x))(p)$$

est mesurable en x , convexe semi-continue inférieurement en p , et ne prend que des valeurs finies à cause de (5.12). C'est donc une intégrande convexe normal dans la terminologie de ROCKAFELLAR, [1], (§ 2, lemme 2, corollaire).

D'après le lemme 4.5, majoration (4.1), l'application :

$$x \longmapsto \bar{f}^{**}(x, Y(x))(Q(x))$$

est sommable $\forall Y \in \mathcal{V}$ et $\forall Q \in \hat{\mathcal{Q}}_{\Omega}$. D'après la formule (5.16) et la majoration (2.4), l'application :

$$x \longmapsto \bar{f}^*(x, Y(x))(\psi(x))$$

est sommable $\forall Y \in \mathcal{V}$ et $\forall \psi \in L_h^2(\Omega)$. On est donc dans les hypothèses du théorème 2, § 2, du papier de ROCKAFELLAR, qui, joint à (5.19) et (5.20), nous permet de conclure que $\forall Q \in L_h^2(\Omega)$:

$$\overline{M}_Y^{**}(Q) = \int_{\Omega} \overline{f}^{**}(x, Y(x))(Q(x)) dx .$$

On en déduit en particulier que les domaines effectifs de $\overline{M}_Y^{**}$ et $\overline{N}_Y^{**}$, c'est-à-dire les ensembles des points où elles sont finies, sont $\widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$ et $\widehat{\mathcal{P}}_F$.

On déduit de ce lemme l'identité :

$$J_1(Y, Q, R) = \overline{M}_Y^{**}(Q) + \overline{N}_Y^{**}(R) = \overline{I}_Y^{**}(Q, R)$$

pour tout Y de W et tout contrôle $(Q, R) \in \widehat{\mathcal{P}}_{\Omega} \times \widehat{\mathcal{P}}_F$. Le problème (PR1)

s'écrit alors en remplaçant le coût par sa valeur :

$$(P.R.1) \quad \begin{cases} Q \in \widehat{\mathcal{P}}_{\Omega} , \quad R \in \widehat{\mathcal{P}}_F , \quad Y \in W \\ AY = \Psi + Q + {}^tT(R) \\ \text{minimiser } \overline{I}_Y^{**}(Q, R) \end{cases}$$

C'est sur cette dernière expression du problème relaxé que nous allons faire la démonstration. Nous commencerons par établir l'existence d'une solution optimale.

Lemme 5.2 (CASTAING) $\widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$ et $\widehat{\mathcal{P}}_F$ sont convexes et respectivement
 $\sigma(L_h^{\infty}(\Omega), L_h^1(\Omega))$ - compact et $(L_h^{\infty}(F), L_h^1(F))$ - compact.

Démonstration

Faisons la démonstration pour $\widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$. C'est un convexe borné de $L_h^{\infty}(\Omega)$, c'est donc une partie équicontinue du dual de $L_h^1(\Omega)$ et comme L_h^{∞} est dense dans L_h^1 , les topologies $\sigma(L_h^{\infty}, L_h^1)$ et $\sigma(L_h^1, L_h)$ coïncident sur $\widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$.

Il est clair que $\widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$ est $\sigma(L_h^{\infty}, L_h^1)$ - relativement compact dans L_h^{∞} . En outre, il est fermé dans L_h^1 . Si en effet une suite Q_n converge vers Q dans L_h^1 , on peut en extraire une suite $Q_{n'}$ qui converge vers Q presque partout, et comme $\widehat{\Gamma}_{\Omega}(x)$ est compact pour tout x :

$$Q(x) = \lim_{n'} Q_{n'}(x) \in \widehat{\Gamma}_{\Omega}(x) \quad \text{p.p.}$$

Donc $Q \in \widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$, et $\widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$ est convexe fermé dans L_h^1 , donc $\sigma(L_h^1, L_h^{\infty})$ - fermé dans L_h^1 . Il est donc $\sigma(L_h^1, L_h^{\infty})$ - fermé dans L_h^{∞} , et $\sigma(L_h^{\infty}, L_h^1)$ - fermé dans L_h^{∞} , donc $\sigma(L_h^{\infty}, L_h^1)$ - compact.

On remarque que, sur $\widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$ et $\widehat{\mathcal{P}}_F$, les topologies $\sigma(L_h^{\infty}, L_h^1)$, parce qu'elles sont compactes, coïncident avec toutes les topologies séparées plus faibles, en particulier avec les topologies $\sigma(L_h^2, L_h^2)$. Dorénavant, $\widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$ et $\widehat{\mathcal{P}}_F$ seront toujours munis de ces topologies.

Lemme 5.3. Soit $\mathcal{B}$ un borné de V , muni de la topologie induite par $\sigma(V, V')$. Les applications :

$$(Y, Q) \mapsto \overline{M}_Y^{**}(Q)$$

$$(Y, R) \mapsto \overline{N}_Y^{**}(R)$$

sont semi-continues inférieurement de $\mathcal{B} \times \widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$ et $\mathcal{B} \times \widehat{\mathcal{P}}_F$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration

Faisons la démonstration pour $\overline{M}^{**}$. Donnons-nous $\varepsilon \geq 0$, $Y_0 \in \mathcal{B}$ et $Q_0 \in \widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$. Par définition de la régularisée, et comme $\overline{M}_{Y_0}^{**}(Q_0)$ est fini, il existe $\psi \in L^2(\Omega)^h$ et $\alpha \geq 0$ tels que :

$$(5.21) \quad \forall Q \in L_h^2(\Omega), \quad \langle \psi, Q \rangle + \alpha \leq \overline{M}_{Y_0}(Q)$$

$$(5.22) \quad \langle \psi, Q_0 \rangle + \alpha + \frac{\varepsilon}{3} \geq \overline{M}_{Y_0}^{**}(Q_0)$$

Grâce à (5.5), on peut remplacer (5.21) par :

$$(5.23) \quad \forall U \in \mathcal{U}_{\Omega}, \quad \langle \psi, \gamma_{\Omega}(U) \rangle + \alpha \leq M_{Y_0}(U)$$

D'après la proposition 2.1, il existe un voisinage faible $\mathcal{W}$ de Y_0 dans V tel que :

$$\forall Y \in \mathcal{W} \cap \mathcal{B}, \forall U \in \mathcal{U}_{\Omega}, \quad |M_Y(U) - M_{Y_0}(U)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

En reportant dans (5.23) :

$$\forall Y \in \mathcal{W} \cap \mathcal{B}, \forall U \in \mathcal{U}_{\Omega}, \quad \langle \psi, \gamma_{\Omega}(U) \rangle + \alpha - \frac{\varepsilon}{3} \leq M_Y(U)$$

et, en se servant à nouveau de (5.5)

$$\forall Y \in \mathcal{W} \cap \mathcal{B}, \forall Q \in L_h^2(\Omega), \quad \langle \psi, Q \rangle + \alpha - \frac{\varepsilon}{3} \leq \overline{M}_Y(Q)$$

Toute minorante affine continue de $\overline{M}_Y$ minore $\overline{M}_Y^{**}$ par définition :

$$(5.24) \quad \forall Y \in W \cap B, \forall Q \in L_h^2(\Omega), \quad \langle \psi, Q \rangle + \alpha - \frac{\varepsilon}{3} \leq \overline{M}_Y^{**}(Q)$$

En retranchant (5.22) de (5.24) :

$$\forall Y \in W \cap B, \forall Q \in L_h^2(\Omega), \quad \langle \psi, Q - Q_0 \rangle - \frac{2\varepsilon}{3} \leq \overline{M}_Y^{**}(Q) - \overline{M}_{Y_0}^{**}(Q_0)$$

On définit un voisinage $\mathcal{V}$ de Q_0 dans $\widehat{\mathcal{P}}_\Omega$ par la condition :

$$\mathcal{V} = \left\{ Q \in \widehat{\mathcal{P}}_\Omega \mid \langle \psi, Q - Q_0 \rangle \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

et on en tire :

$$\forall Y \in W \cap B, \forall Q \in \mathcal{V}, \quad \overline{M}_Y^{**}(Q) - \overline{M}_{Y_0}^{**}(Q_0) \geq -\varepsilon$$

ce qui est bien la semi-continuité inférieure.

Corollaire . Le problème relaxé a une solution optimale

Démonstration

Il s'agit de minimiser la fonction

$$\overline{I}_Y^{**}(Q, R) = \overline{M}_Y^{**}(Q) + \overline{N}_Y^{**}(R)$$

sur l'ensemble :

$$\mathcal{A} = \left\{ (Q, R, Y) \mid Q \in \widehat{\mathcal{P}}_\Omega, R \in \widehat{\mathcal{P}}_F, Y = Y_{Q,R} \right\}.$$

Mettons sur $\mathcal{A}$ la topologie induite par $\widehat{\mathcal{P}}_\Omega \times \widehat{\mathcal{P}}_F \times V$ faible. D'après le lemme 5.2, $\widehat{\mathcal{P}}_\Omega$ et $\widehat{\mathcal{P}}_F$ sont compacts. D'après la proposition 3.5, l'application $(Q, R) \mapsto Y_{Q,R}$ de $\widehat{\mathcal{P}}_\Omega \times \widehat{\mathcal{P}}_F$ dans V faible est continue. Son graphe, qui n'est autre que $\mathcal{A}$, est donc compact.

En particulier, il est borné, et d'après le lemme 5.3, l'application

$$(Q, R, Y) \mapsto \overline{I}_Y^{**}(Q, R) \text{ est semi-continue inférieurement sur le compact } \mathcal{A}.$$

Elle atteint donc sa borne inférieure sur $\mathcal{A}$.

On a donc montré l'existence d'une solution optimale $(\overline{Q}, \overline{R}, \overline{Y})$. Nous allons maintenant l'approcher, à l'aide de résultats sur l'épigraphe de $\overline{I}_Y^{**}$ et du théo-

rème 1.1. Convenons dorénavant de noter B le convexe borné de V , image de

$$\widehat{\mathcal{P}}_\Omega \times \widehat{\mathcal{P}}_F \text{ par l'application } (Q, R) \mapsto Y_{Q,R}.$$

Lemme 5.4. L'épigraphe de $\bar{I}_Y^{**}$ est l'enveloppe convexe fermée de l'épigraphe de $\bar{I}_Y$.

Démonstration

L'épigraphe de $\bar{I}_Y^{**}$ est le plus petit épigraphe convexe fermé contenant l'épigraphe de $\bar{I}_Y$, soit $\mathcal{C}$. Si on montre que $\bar{\text{co}}(\mathcal{C})$ est un épigraphe, le lemme est établi.

Il faut donc montrer que si $(Q, R, \eta) \in \bar{\text{co}}(\mathcal{C})$, alors

$$(5.25) \quad \forall \alpha \geq 0, \quad (Q, R, \eta + \alpha) \in \bar{\text{co}}(\mathcal{C})$$

Or il est facile de voir que si $(Q, R, \eta) \in \text{co}(\mathcal{C})$, alors

$$\forall \alpha \geq 0, \quad (Q, R, \eta + \alpha) \in \text{co}(\mathcal{C})$$

Il suffit pour cela d'écrire :

$$k \in \mathbb{N}, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_k$$

$$Q = \sum_{i=1}^k \lambda_i Q_i, \quad R = \sum_{i=1}^k \lambda_i R_i, \quad \eta = \sum_{i=1}^k \lambda_i \eta_i$$

$$(Q_i, R_i, \eta_i) \in \mathcal{C}, \quad i = 1, \dots, k$$

et comme $\mathcal{C}$ est un épigraphe :

$$\forall \alpha \geq 0, \quad (Q_i, R_i, \eta_i + \alpha) \in \mathcal{C}, \quad i = 1, \dots, k$$

$$\forall \alpha \geq 0, \quad (Q, R, \eta + \alpha) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (Q_i, R_i, \eta_i + \alpha) \in \text{co}(\mathcal{C}), \quad i = 1, \dots, k$$

D'où évidemment (5.25), car si (Q, R, η) est limite d'une suite

$(Q_n, R_n, \eta_n) \in \text{co}(\mathcal{C})$, alors $(Q, R, \eta + \alpha)$ sera limite de la suite

$$(Q_n, R_n, \eta_n + \alpha) \in \text{co}(\mathcal{C}).$$

Lemme 5.5. Soit $(\bar{Q}, \bar{R}, \bar{Y})$ une solution optimale du problème relaxé. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout voisinage faible $\bar{V}_1 \times \bar{V}_2$ de $(\bar{Q}, \bar{R})$ dans

$L_h^2(\Omega) \times L_h^2(F)$, il existe $k \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \Lambda_k$, $\{Q_1, \dots, Q_k\} \subset \mathcal{F}_\Omega$, $\{R_1, \dots, R_k\} \subset \mathcal{F}_F$, tels que :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i Q_i \in \mathcal{V}_1$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i R_i \in \mathcal{V}_2$$

$$\left| \bar{I}_{\bar{Y}}^{**}(\bar{Q}, \bar{R}) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}^{**}(Q_i, R_i) \right| \leq \varepsilon$$

en notant $Y_0 = Y_{\sum \alpha_i Q_i, \sum \alpha_i R_i}$

Démonstration

D'après la proposition 2.1, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\bar{Y}$ dans V faible, tel que :

$$(5.26) \quad \forall Y \in \mathcal{U} \cap B, \forall U \in \mathcal{U}_\Omega, \forall V \in \mathcal{U}_F, \quad |I(\bar{Y}, U, V) - I(Y, U, V)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Prenons $\mathcal{V}'_1 \subset \mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}'_2 \subset \mathcal{V}_2$ deux voisinages faibles de $\bar{Q}$ et $\bar{R}$ dans

$L_h^2(\Omega)$ et $L_h^2(F)$ tels que :

$$\forall (Q, R) \in \mathcal{V}'_1 \times \mathcal{V}'_2, \quad Y_{Q,R} \in \mathcal{W}$$

D'après le lemme 5.4, il existe $k \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \bigwedge_k$ et k points

$\{(Q_i, R_i, \gamma_i) \mid i = 1, \dots, k\}$ de l'épigraphe de $\bar{I}_{\bar{Y}}$ tels que :

$$(5.27) \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i Q_i \in \mathcal{V}'_1$$

$$(5.28) \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i R_i \in \mathcal{V}'_2$$

$$(5.29) \quad \left| \bar{I}_{\bar{Y}}^{**}(Q, R) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \gamma_i \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

avec par définition :

$$(5.30) \quad Q_i \in \mathcal{J}_\Omega, \quad R_i \in \mathcal{J}_F, \quad i = 1, \dots, k$$

$$(5.31) \quad Y_0 = Y_{\sum \alpha_i Q_i, \sum \alpha_i R_i} \in \mathcal{W}$$

$$(5.32) \quad \eta_i \geq \bar{I}_Y(Q_i, R_i), \quad i = 1, \dots, k$$

Les formules (5.5) et (5.6) nous montrent qu'il existe pour tout i un $U_i \in \mathcal{U}_\Omega$ et un $V_i \in \mathcal{U}_F$ tels que :

$$\bar{I}_Y(Q_i, R_i) = I(\bar{Y}, U_i, V_i)$$

$$\eta_i \geq I(\bar{Y}, U_i, V_i)$$

En utilisant (5.26) et (5.31), on en déduit pour tout i :

$$\eta_i \geq I(Y_0, U_i, V_i) - \frac{\varepsilon}{2}$$

et en employant de nouveau (5.5) et (5.6) :

$$\eta_i \geq \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i) - \frac{\varepsilon}{2}$$

On a donc :

$$(5.33) \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i \eta_i + \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i)$$

Comme $\bar{I}_{Y_0}^{**}$ minore $\bar{I}_{Y_0}$:

$$(5.34) \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i) \geq \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}^{**}(Q_i, R_i)$$

Comme $\bar{I}_{Y_0}^{**}$ est convexe :

$$(5.35) \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}^{**}(Q_i, R_i) \geq \bar{I}_{Y_0}^{**}\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i Q_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i R_i\right)$$

Or $(\sum_{i=1}^k \alpha_i Q_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i R_i)$ est un contrôle admissible du problème relaxé, et

l'état correspondant est justement Y_0 , par (5.31). Comme $(\bar{Q}, \bar{R}, \bar{Y})$ est solution optimale du problème relaxé :

$$(5.36) \quad \bar{I}_{Y_0}^{**}\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i Q_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i R_i\right) \geq \bar{I}_{\bar{Y}}^{**}(\bar{Q}, \bar{R})$$

En rassemblant toutes les inégalités (5.33) - (5.36) on a l'encadrement :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \eta_i + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i) \Rightarrow \bar{I}_Y^{**}(\bar{Q}, \bar{R})$$

En se servant de (5.29), on en déduit :

$$\bar{I}_Y^{**}(\bar{Q}, \bar{R}) + \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i) \geq \bar{I}_Y^{**}(\bar{Q}, \bar{R})$$

$$\left| \bar{I}_Y^{**}(\bar{Q}, \bar{R}) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i) \right| \leq \varepsilon$$

Joint à (5.27) et (5.28) et (5.30), c'est ce qu'il fallait démontrer

Lemme 5.6. Soient $k \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \Lambda_k$, $\{Q_1, \dots, Q_k\} \subset \mathcal{I}_\Omega$,

$\{R_1, \dots, R_k\} \subset \mathcal{I}_F$. Pour tout $\varepsilon \geq 0$, et tout voisinage faible $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$

de $(\sum_{i=1}^k \alpha_i Q_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i R_i)$ dans $L_h^2(\Omega) \times L_0^2(F)$, il existe

$(Q, R) \in \mathcal{I}_\Omega \times \mathcal{I}_F$ tels que

$$Q \in \mathcal{V}_1$$

$$R \in \mathcal{V}_2$$

$$\left| \bar{I}_Y(Q, R) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i) \right| \leq \varepsilon$$

en notant $Y = Y_{Q,R}$ et $Y_0 = Y_{\sum \alpha_i Q_i, \sum \alpha_i R_i}$.

Démonstration

D'après les lemmes 3.3 et 3.3 bis, il existe pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$ un

$U_i \in \mathcal{U}_\Omega$ et un $V_i \in \mathcal{U}_F$ tels que :

$$(5.37) \quad \forall x \in \Omega, \quad \bar{f}(x, Y_0(x))(Q_i(x)) = f(x, Y_0(x), U_i(x))$$

$$(5.38) \quad \forall s \in F, \quad \bar{g}(s, Y_0(s))(R_i(s)) = g(s, Y_0(s), V_i(s))$$

et bien entendu :

$$(5.39) \quad \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i) = M_{Y_0}(U_i) + N_{Y_0}(V_i)$$

On applique le théorème 1.1 à Ω , ce qui nous donne une suite $m \mapsto (A_m^1, \dots, A_m^k)$ de partitions boréliennes de Ω , et à F , ce qui nous donne une suite $m \mapsto (B_m^1, \dots, B_m^k)$ de partitions boréliennes de F .

Pour m donné, on définit $U_m : \Omega \mapsto K_\Omega$ et $V_m : F \mapsto K_F$ par :

$$(5.40) \quad U_m(x) = U_i(x) \quad \text{si} \quad x \in A_m^i$$

$$(5.41) \quad V_m(s) = V_i(s) \quad \text{si} \quad s \in B_m^i$$

Il est clair que U_m et V_m sont mesurables, que $U_m(x) \in K_\Omega(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et que $V_m(s) \in K_F(s)$ pour tout $s \in F$. Donc $U_m \in \mathcal{U}_\Omega$ et $V_m \in \mathcal{U}_F$.

On pose :

$$(5.42) \quad Q_m = \gamma_\Omega(U_m) \in \mathcal{J}_\Omega$$

$$(5.43) \quad R_m = \gamma_F(V_m) \in \mathcal{J}_F$$

$$(5.44) \quad Y_m = Y_{U_m}, V_m = Y_{Q_m}, R_m \in \mathcal{B}$$

En reportant dans (5.37) et (5.38), on obtient :

$$(5.45) \quad \forall x \in \Omega, \quad \bar{f}(x, Y_\circ(x))(Q_m(x)) = f(x, Y_\circ(x), U_m(x))$$

$$(5.46) \quad \forall s \in F, \quad \bar{g}(s, Y_\circ(s))(R_m(s)) = g(s, Y_\circ(s), V_m(s))$$

Il est clair que :

$$Q_m = \sum_{i=1}^k \gamma_{A_m^i} Q_i$$

$$R_m = \sum_{i=1}^k \gamma_{B_m^i} R_i$$

$$M_{Y_\circ}^{(U_m)} = \int_{\Omega} f(x, Y_\circ(x), U_m(x)) dx = \sum_{i=1}^k \int_{A_m^i} f(x, Y_\circ(x), U_i(x)) dx$$

$$N_{Y_0}(V_m) = \int_F g(s, Y_0(s), V_m(s)) ds = \sum_{i=1}^k \int_{B_m^i} g(s, Y_0(s), V_i(s)) ds.$$

Les Q_i et les R_i sont dans $L_h^2(\Omega)$ et $L_h^2(F)$. Les $f(Y_0, U_i)$ et les

$g(Y_0, V_i)$ sont dans $L^1(\Omega)$ et $L^1(F)$. On peut appliquer le théorème 1.1 :

$$(5.47) \quad Q_m \longrightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i Q_i \quad \text{pour} \quad \sigma(L_h^2(\Omega), L_h^2(\Omega))$$

$$(5.48) \quad R_m \longrightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i R_i \quad \text{pour} \quad \sigma(L_h^2(F), L_h^2(F))$$

$$(5.49) \quad M_{Y_0}(U_m) \longrightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{\Omega} f(x, Y_0(x), U_i(x)) dx$$

$$(5.50) \quad N_{Y_0}(V_m) \longrightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_F g(s, Y_0(s), V_i(s)) ds$$

En ajoutant (5.49) et (5.50)

$$(5.51) \quad I(Y_0, U_m, V_m) \longrightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i I(Y_0, U_i, V_i)$$

De (5.37) et (5.38), (5.45) et (5.46) découlent :

$$(5.52) \quad I(Y_0, U_i, V_i) = \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i)$$

$$(5.53) \quad I(Y_0, U_m, V_m) = \bar{I}_{Y_0}(Q_m, R_m)$$

En reportant dans (5.51) :

$$(5.54) \quad \bar{I}_{Y_0}(Q_m, R_m) \longrightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i)$$

Ce n'est pas encore tout à fait le résultat désiré. Il nous manque que :

$$\bar{I}_{Y_0}(Q_m, R_m) - \bar{I}_{Y_m}(Q_m, R_m) \longrightarrow 0$$

C'est ce que nous allons établir.

D'après la proposition 2.1, pour tout $\varepsilon \geq 0$ il existe un voisinage de Y_0 dans V faible tel que :

$$(5.55) \quad \forall z \in W \cap B, \forall u \in \mathcal{U}_\Omega, \forall v \in \mathcal{U}_F, |I(Z, U, V) - I(Y, U, V)| \leq \varepsilon$$

Posons $\mathcal{U}'_\Omega = \gamma_\Omega^{-1}(Q_m)$, $\mathcal{U}'_F = \gamma_F^{-1}(R_m)$. On a par (5.5) et (5.6) :

$$\bar{I}_{Y_0}(Q_m, R_m) = \min \{ I(Y, U, V) \mid U \in \mathcal{U}'_\Omega, V \in \mathcal{U}'_F \}$$

$$\bar{I}_Z(Q_m, R_m) = \min \{ I(Z, U, V) \mid U \in \mathcal{U}'_\Omega, V \in \mathcal{U}'_F \}$$

De (5.5) on déduit :

$$\forall z \in W \cap B, \forall u \in \mathcal{U}'_\Omega, \forall v \in \mathcal{U}'_F, \bar{I}_{Y_0}(Q_m, R_m) \leq I(Z, U, V) + \varepsilon$$

$$\forall z \in W \cap B, \bar{I}_{Y_0}(Q_m, R_m) \leq \bar{I}_Z(Q_m, R_m) + \varepsilon$$

De même :

$$\forall z \in W \cap B, \forall u \in \mathcal{U}'_\Omega, \forall v \in \mathcal{U}'_F, \bar{I}_Z(Q_m, R_m) \leq I(Y, U, V) + \varepsilon$$

$$\forall z \in W \cap B, \bar{I}_Z(Q_m, R_m) \leq \bar{I}_{Y_0}(Q_m, R_m) + \varepsilon$$

D'où enfin :

$$\forall z \in W \cap B, |\bar{I}_Z(Q_m, R_m) - \bar{I}_{Y_0}(Q_m, R_m)| \leq \varepsilon$$

Mais, d'après (5.44), (5.47) et (5.48), on sait qu'il existe m_0 tel que :

$$\forall m \geq m_0, Y_m \in W \cap B$$

$$\forall m \geq m_0, |\bar{I}_{Y_m}(Q_m, R_m) - \bar{I}_{Y_0}(Q_m, R_m)| \leq \varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, cela veut dire que :

$$(5.56) \quad \bar{I}_{Y_m}(Q_m, R_m) - \bar{I}_{Y_0}(Q_m, R_m) \longrightarrow 0$$

En ajoutant (5.54) et (5.56), on obtient :

$$(5.57) \quad \bar{I}_{Y_m}(Q_m, R_m) \longrightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{I}_{Y_0}(Q_i, R_i)$$

Joignons (5.47), (5.48) et (5.57). On voit que, pour m assez grand, $Q = Q_m$,

$R = R_m$, $Y = Y_m$ satisfont aux conditions du lemme. $\square$

Corollaire . Soit $(\bar{Q}, \bar{R}, \bar{Y})$ une solution optimale du problème relaxé. Pour tout ε tout voisinage faible $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ de $(\bar{Q}, \bar{R})$ dans $L_h^2(\Omega) \times L_h^2(F)$, il existe

$(Q, R) \in \mathcal{J}_\Omega \times \mathcal{J}_F$ tels que :

$$Q \in \mathcal{V}_1$$

$$R \in \mathcal{V}_2$$

$$|\bar{I}_Y(Q, R) - \bar{I}_Y^{**}(Q, R)| \leq \varepsilon$$

en notant $Y = Y_{Q, R}$

Démonstration

Il suffit de mettre bout à bout les lemmes 5.5 et 5.6 . $\square$

Fin de la démonstration du théorème de relaxation

D'après la proposition 3.4, pour tout $(U, V) \in \mathcal{U}_\Omega \times \mathcal{U}_F$, en posant $Y_{U, V} = Y$:

$$\bar{M}_Y(\gamma_\Omega(U)) + \bar{N}_Y(\gamma_F(V)) \leq M_Y(U) + N_Y(V)$$

Comme $\bar{M}_Y^{**}$ et $\bar{N}_Y^{**}$ minorent $\bar{M}_Y$ et $\bar{N}_Y$, on a également :

$$\bar{M}_Y^{**}(\gamma_\Omega(U)) + \bar{N}_Y^{**}(\gamma_F(V)) \leq M_Y(U) + N_Y(V)$$

$$\min \left\{ \bar{I}_Y^{**}(Q, R) \mid Y = Y_{Q, R}, Q \in \mathcal{J}_\Omega, R \in \mathcal{J}_F \right\} \leq$$

$$\leq \inf \left\{ I(Y, U, V) \mid Y = Y_{U, V}, U \in \mathcal{U}_\Omega, V \in \mathcal{U}_F \right\}$$

$$(5.58) \quad \min(P.R.1) \leq \inf(P.O)$$

Soit $(\bar{Q}, \bar{R}, \bar{Y})$ une solution optimale du problème relaxé. On sait, d'après le premier corollaire, qu'il en existe au moins une. Soit $\mathcal{V}_1^n$ et $\mathcal{V}_2^n$ une suite fondamentale de voisinages faibles de $(\bar{Q}, \bar{R})$ dans $L_h^2(\Omega) \times L_h^2(F)$.

D'après le second corollaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $(Q_n, R_n) \in \mathcal{J}_\Omega \times \mathcal{J}_F$

$Y_n = Y_{Q_n, R_n}$ tels que :

$$(5.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_n \in \mathcal{V}_1^n \\ R_n \in \mathcal{V}_2^n \\ \left| \bar{I}_{Y_n}(Q_n, R_n) - \bar{I}_Y^{**}(\bar{Q}, \bar{R}) \right| \leq \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

D'après les formules (5.5) et (5.6), il existe $(U_n, V_n) \in \mathcal{U}_\Omega \times \mathcal{U}_F$ tels que :

$$(5.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_\Omega(U_n) = Q_n \\ Y_F(V_n) = R_n \\ Y_n = Y_{U_n, V_n} \\ I(Y_n, U_n, V_n) = \bar{I}_{Y_n}(Q_n, R_n) \end{array} \right.$$

Et donc :

$$\left| I(Y_n, U_n, V_n) - \bar{I}_Y^{**}(\bar{Q}, \bar{R}) \right| \leq \frac{1}{n}$$

Comme (U_n, V_n) est un contrôle admissible du problème originel, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\lim_n I(Y_n, U_n, V_n) = \bar{I}_Y^{**}(\bar{Q}, \bar{R})$$

$$\inf(P.O) \leq \lim_n I(Y_n, U_n, V_n)$$

$$\min(P.R) = \bar{I}_Y^{**}(\bar{Q}, \bar{R})$$

$$\inf(P.O) \leq \min(P.R.1)$$

et en comparant à (5.58) :

$$(5.61) \quad \inf(P.O) = \min(P.R.1)$$

$$\lim_n I(Y_n, U_n, V_n) = \inf(P.O)$$

La suite (U_n, V_n, Y_n) est donc une suite minimisante du problème originel, et les formules de convergence (4.6) sont établies en (5.59) et (5.60).

Il ne reste plus qu'à établir les formules (4.5). Partons d'une suite minimisante (U_n, V_n, Y_n) du problème originel, et posons :

$$Q_n = \gamma_{\Omega}(U_n)$$

$$R_n = \gamma_F(V_n)$$

$$Y_n = Y_{Q_n, R_n} = Y_{U_n, V_n}$$

Comme $\widehat{\mathcal{P}}_{\Omega}$ et $\widehat{\mathcal{P}}_F$ sont compacts, et l'application $(Q, R) \mapsto Y_{Q, R}$ continue de $\widehat{\mathcal{P}}_{\Omega} \times \widehat{\mathcal{P}}_F$ dans $\mathcal{V}$ faible, il existe $(\bar{Q}, \bar{R}) \in \widehat{\mathcal{P}}_{\Omega} \times \widehat{\mathcal{P}}_F$ et une suite extraite $(Q_{n'}, R_{n'})$ tels que :

$$(5.62) \quad \begin{aligned} Q_{n'} &\longrightarrow \bar{Q} && \text{dans } \widehat{\mathcal{P}}_{\Omega} \\ R_{n'} &\longrightarrow \bar{R} && \text{dans } \widehat{\mathcal{P}}_F \end{aligned}$$

$$Y_{n'} = Y_{Q_{n'}, R_{n'}} \longrightarrow Y_{\bar{Q}, \bar{R}} = \bar{Y} \quad \text{dans } \mathcal{V} \text{ faible}$$

D'après la semi-continuité inférieure de $\bar{I}^{**}$ (lemme 5.3) :

$$\bar{I}_{\bar{Y}}^{**}(\bar{Q}, \bar{R}) \leq \liminf \bar{I}_{Y_{n'}}^{**}(Q_{n'}, R_{n'})$$

Comme $\bar{I}_{\bar{Y}}^{**}$ minore $\bar{I}_Y$

$$\bar{I}_{Y_{n'}}^{**}(Q_{n'}, R_{n'}) \leq \bar{I}_{Y_{n'}}(Q_{n'}, R_{n'})$$

et d'après les formules (5.5) et (5.6) :

$$\bar{I}_{Y_{n'}}(Q_{n'}, R_{n'}) \leq I(Y_{n'}, U_{n'}, V_{n'})$$

D'où enfin :

$$\bar{I}_{\bar{Y}}^{**}(\bar{Q}, \bar{R}) \leq \liminf I(Y_{n'}, U_{n'}, V_{n'})$$

et comme la suite $(U_{n'}, V_{n'}, Y_{n'})$ est minimisante :

$$\bar{I}_{\bar{Y}}^{**}(Q, R) \leq \inf(P.O)$$

En appliquant (5.61) :

$$\bar{I}_{\bar{Y}}^{**}(\bar{Q}, \bar{R}) \leq \min (P.R \ 1)$$

Comme $(\bar{Q}, \bar{R})$ est un contrôle admissible du problème relaxé :

$$\bar{I}_{\bar{Y}}^{**}(\bar{Q}, \bar{R}) \geq \min (P \ R \ 1)$$

$$\bar{I}_{\bar{Y}}^{**}(\bar{Q}, \bar{R}) = \min (P \ R \ 1)$$

Donc $(\bar{Q}, \bar{R}, \bar{Y})$ est solution optimale du problème relaxé. Les formules de convergence (4.15) sont écrites en (5.62). Ceci termine la démonstration du théorème de relaxation.

VI - EXISTENCE DE SOLUTIONS OPTIMALES

On peut se demander ce qui se passe quand le problème originel a une solution optimale. La proposition suivante est simple à démontrer.

Proposition 6.1 Si $(\bar{Y}, \bar{U}, \bar{V})$ est une solution optimale du problème originel, alors $(\bar{Y}, \gamma_{\Omega}(\bar{U}), \gamma_F(\bar{V}))$ est une solution optimale du problème relaxé.

Démonstration

La suite constante $U_n = \bar{U}$, $V_n = \bar{V}$, est minimisante. La conclusion procède de l'application du théorème de relaxation. $\square$

Il est bien clair que la réciproque est fausse. Néanmoins, le théorème de relaxation peut nous donner une condition suffisante pour que le problème originel ait une solution optimale.

Théorème d'existence - Pour que le problème originel ait une solution optimale, il suffit que l'une de ces deux conditions équivalentes soit vérifiée :

(a) pour presque tout x et presque tout s , les ensembles

$$\Gamma_{\Omega}(x) = \gamma_{\Omega}(x, K_{\Omega}(x)) \text{ et } \Gamma_F(s) = \gamma_F(s, K_F(s))$$

sont convexes dans $\mathbb{R}^h$, et les applications

$$q \mapsto \bar{f}(x, y)(q) = \min \{ f(x, y, u) \mid u \in K_{\Omega}(x) \text{ et } \gamma_{\Omega}(x, u) = q \}$$

$$r \mapsto g(s, y)(r) = \min \{ g(s, y, v) \mid v \in K_F(s) \text{ et } \gamma_F(s, v) = r \}$$

sont convexes de $\mathbb{R}^h$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $y \in \mathbb{R}^h$

(b) pour presque tout x et tout y , l'ensemble :

$$\sum_{\Omega}(x, y) = \{ (q, \eta) \mid \exists u \in K_{\Omega}(x) : q = \gamma_{\Omega}(x, u) \text{ et } \eta \geq f(x, y, u) \}$$

est convexe dans $\mathbb{R}^{h+1}$, et pour presque tout s et tout y , l'ensemble :

$$\sum_F(s, y) = \{ (r, \theta) \mid \exists v \in K_F(s) : r = \gamma_F(s, v) \text{ et } \theta \geq g(s, y, v) \}$$

est convexe dans $\mathbb{R}^{h+1}$

Démonstration

$\sum_{\Omega}(x, y)$ est l'épigraphe de $\bar{f}(x, y)(.)$, et $\sum_F(s, y)$ est l'épigraphe de

$\bar{g}(x,y)(.)$. Pour qu'une fonction soit convexe, il faut et il suffit que son épi-
graphe le soit. D'où l'équivalence de (a) et de (b) .

Si $\Gamma_{\Omega}(x)$ est convexe, et si $\bar{f}(x,y)(.)$ est convexe sur $\Gamma_{\Omega}(x)$, on a :

$$\Gamma_{\Omega}(x) = \widehat{\Gamma_{\Omega}(x)}$$

$$\bar{f}(x,y)(.) = \bar{f}^{**}(x,y)(.)$$

Si $\Gamma_F(s)$ est convexe, et si $\bar{g}(s,y)(.)$ est convexe sur $\Gamma_F(s)$, on a :

$$\Gamma_F(s) = \widehat{\Gamma_F(s)}$$

$$\bar{g}(s,y)(.) = \bar{g}^{**}(s,y)(.)$$

Alors le problème (P.R 1) et le problème (3.13) sont confondus.

D'après le théorème de relaxation, le problème (3.13) a donc une solution opti-
male $(\bar{Q}, \bar{R}, \bar{Y})$. En appliquant la proposition 3.4, on voit qu'il existe une solu-
tion optimale $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{Y})$ du problème originel, avec

$$\bar{Q} = \gamma_{\Omega}(\bar{U}) , \quad \bar{R} = \gamma_F(\bar{V}) , \quad \bar{Y} = Y_{\bar{Q}, \bar{R}} = Y_{\bar{U}, \bar{V}} \quad \blacksquare$$

VII - UN CAS PARTICULIER

Dans le cas particulier où :

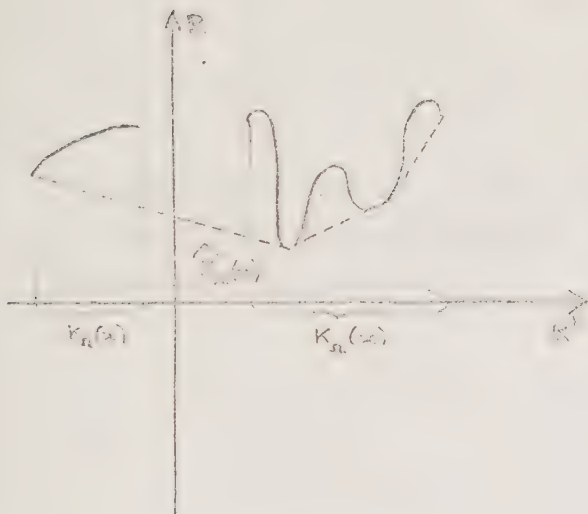
$$K_{\Omega} \subset [-1, 1]^h, \quad \gamma_{\Omega}(x, \cdot) = \text{Id}$$

$$K_F \subset [-1, 1]^h, \quad \gamma_F(s, \cdot) = \text{Id}$$

le problème originel prend la forme plus simple :

$$(P.O) \begin{cases} \forall x \in \Omega, U(x) \in K_{\Omega}(x) \\ \forall s \in F, V(s) \in K_F(s) \\ \Delta Y = \Psi + U + {}^t T(V) \\ \text{minimiser} \left[\int_{\Omega} f(x, Y(x), U(x)) dx + \int_F g(s, Y(s), V(s)) ds \right] \end{cases}$$

On note $\widehat{K}_{\Omega}(x)$ et $\widehat{K}_F(s)$ les enveloppes convexes compactes de $K_{\Omega}(x)$ et $K_F(s)$. On prolonge $f(x, y)(\cdot)$ et $g(s, y)(\cdot)$ par $+\infty$ hors de $K_{\Omega}(x)$ et $K_F(s)$, et on note $\bar{f}^{**}(x, y)(\cdot)$ et $\bar{g}^{**}(s, y)(\cdot)$ les régularisées des fonctions ainsi obtenues.



$$\sim = f(x, y)(\cdot)$$

$$- - - = \bar{f}^{**}(x, y)(\cdot)$$

Le problème relaxé sous la première forme s'écrit alors :

$$(PR\ 1) \left\{ \begin{array}{l} U(x) \in \hat{K}_{\Omega}(x) \quad \forall x \in \Omega \\ V(s) \in \hat{K}_F(s) \quad \forall s \in F \\ AY = \Psi + U + t_T(V) \text{ dans } V' \\ \text{minimiser} \left[\int_{\Omega} f^{**}(x, Y(x))(U(x)) dx + \int_F g^{**}(s, Y(s))(V(s)) ds \right] \end{array} \right.$$

Notons $I(Y, U, V)$ le critère originel et $J_1(Y, U, V)$ le critère relaxé.

Le théorème de relaxation s'écrit :

Théorème de relaxation . Le problème relaxé a une solution optimale au moins. La valeur du problème relaxé est égale à la valeur du problème originel :

$$\inf (PO) = \min (PR\ 1)$$

Si (U_n, V_n, Y_n) est une suite minimisante du problème originel, il existe une suite extraite $(U_{n'}, V_{n'}, Y_{n'})$ et une solution optimale (Q, R, Y) du problème relaxé telles que :

$$(6.1) \quad \begin{array}{ll} U_{n'} \rightarrow U & \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(\Omega), L_h^1(\Omega)) \\ V_{n'} \rightarrow V & \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(F), L_h^1(F)) \\ Y_{n'} \rightarrow Y & \text{pour } \sigma(V, V') \end{array}$$

$$I(Y_{n'}, U_{n'}, V_{n'}) \rightarrow J_1(Y, U, V) \text{ dans } \mathbb{R}$$

Réciproquement, si (Y, U, V) est une solution optimale du problème relaxé, il existe une suite minimisante (Y_n, U_n, V_n) du problème originel telle que :

$$(6.2) \quad \begin{array}{ll} U_n \rightarrow U & \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(\Omega), L_h^1(\Omega)) \\ V_n \rightarrow V & \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(F), L_h^1(F)) \\ Y_n \rightarrow Y & \text{pour } \sigma(V, V') \end{array}$$

$$I(Y_n, U_n, V_n) \rightarrow J_1(Y, U, V) \text{ dans } \mathbb{R}$$

Le théorème d'existence prend la forme simple :

Théorème d'existence . Si $f(x, y, \cdot)$ et $g(x, y, \cdot)$ sont convexes pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $y \in \mathbb{R}^h$, le problème originel a une solution optimale.

VIII

EXEMPLES

Dans tout ce qui suit, on se place dans le cadre de l'exemple 2.2.

On a $h = 1$ $V = W_0^{1,2}(\Omega)$, et

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx$$

$$a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega) \quad \forall i \quad \forall j$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p sur } \Omega.$$

Exemple 8.1

On se pose le problème suivant :

$$(P.0) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^n - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial Y}{\partial x_j}) = U \quad \text{dans } D'(\Omega) \\ Y|_F = 0 \\ U(x) \in [-1, 0] \cup \{1\} \\ \text{minimiser } \int_{\Omega} (Y^2(x) - U^2(x)) dx \end{array} \right.$$

On est dans le cas particulier du § VII.

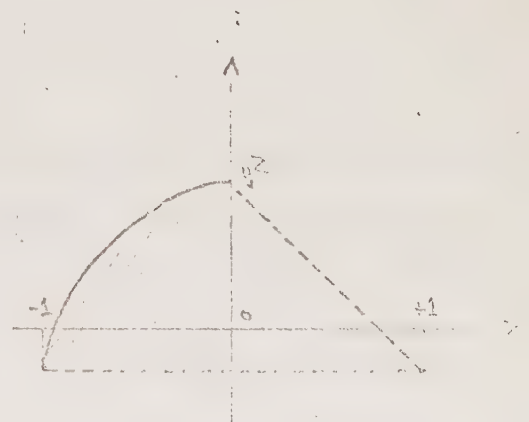
$$K_{\Omega}(x) = [-1, 0] \cup \{1\}$$

$$f(x, y)(u) = y^2 - u^2 \quad \forall u \in K_{\Omega}(x)$$

$$\hat{K}_{\Omega}(x) = [-1, 1]$$

$$\tilde{f}^{**}(x, y)(u) = y^2 - 1 \quad \forall u \in \hat{K}_{\Omega}(x)$$

Le problème relaxé est donc :



$$(PR1) \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial Y}{\partial x_j}) = U \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ Y|_F = 0 \\ U(x) \in [-1, 1] \\ \text{minimiser } \int_{\Omega} (Y^2(x) - 1) dx \end{array} \right.$$

On a clairement :

$$\int_{\Omega} (Y^2(x) - 1) dx = \int_{\Omega} Y^2(x) dx - \text{mes } \Omega$$

Le problème relaxé a une solution optimale unique :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= 0, \quad \bar{Y} = 0 \\ \min(PR1) &= -\text{mes } \Omega \end{aligned}$$

Par application du théorème de relaxation :

$$\inf (P0) = -\text{mes } \Omega$$

Donc le problème originel n'a pas de solution optimale. En effet, s'il en avait une, elle serait solution optimale du problème (PR1) (proposition 6.1), et ce serait donc nécessairement $\bar{U} = 0$, $\bar{Y} = 0$. En reportant dans le critère :

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\text{mes } \Omega \\ J(0,0) &\geq \inf(P0) \end{aligned}$$

Soit cependant (U_n, Y_n) une suite minimisante du problème (I). En appliquant le théorème de relaxation, par unicité de la solution optimale relaxée, on voit que toutes les suites extraites convergent vers $(0,0)$ dans $\hat{\mathcal{F}}_{\Omega} \times \mathcal{V}$ faible. Donc la suite elle-même converge vers zéro :

$$\begin{aligned} U_n &\rightarrow 0 & \sigma(L^{\infty}, L^1) \\ Y_n &\rightarrow 0 & W^{1,2}_0 \text{ faible, et } L^2 \text{ fort} \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} (Y_n^2(x) - U_n^2(x)) dx \rightarrow -\text{mes } \Omega$$

Donc :

$$(8.1) \quad \int_{\Omega} U_n^2(x) dx \longrightarrow \text{mes } \Omega .$$

Finalement :

$$Y_n \longrightarrow 0 \quad W_0^{1,2} \text{ faible, } L^2 \text{ fort}$$

$$U_n \longrightarrow 0 \quad \sigma(L^\infty, L^1)$$

$$\|U_n\|_{L^2} \longrightarrow \|1\|_{L^2}$$

$$U_n^2 \longrightarrow 1 \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

La dernière formule se déduisant de (8.1) à l'aide du lemme de Fatou.

On peut ainsi juger du caractère de la suite U_n , oscillant de plus en plus rapidement entre les valeurs -1 et 1 sur Ω .

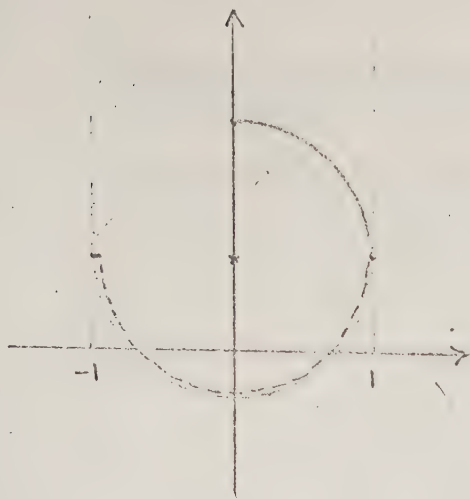
Exemple 8.2

Soit $\Omega_1 \subset \Omega$, avec $\text{mes } \Omega_1 > 0$. On se pose le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial Y}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \varphi(x) \cos(\pi U(x)) dx \\ Y|_F = 0 \\ U(x) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\ \text{minimiser } \int_{\Omega_1} (Y(x) \sin(\frac{1}{Y(x)}) + \sin(\pi U(x))) dx \end{array} \right.$$

Si $x \notin \Omega_1$, $\Gamma_{\Omega}(x) = [-1, 1]$, et $\bar{f}(x,y)(.)$ vaut 0 sur $\Gamma_{\Omega}(x)$ et $+\infty$ en dehors de $\Gamma_{\Omega}(x)$

Si $x \in \Omega_1$, faisons une figure.



$$= \sum_{\Omega} (x, y)$$

$$= \bar{f}(x, y)(.)$$

La courbe de représentation paramétrique

$$u \longmapsto \begin{cases} \cos \pi u \\ y \sin \frac{1}{y} + \sin \pi u \end{cases}$$

$$u \in \left[-1, \frac{1}{2} \right]$$

→ est un trois-quarts de cercle centré en

$$(0, y \sin \frac{1}{y}) .$$

On a $\Gamma_{\Omega}(x) = [-1, 1]$, et $\bar{f}(x, y)(.)$ est convexe.

Les hypothèses du théorème d'existence sont donc satisfaites. Le problème posé admet une solution optimale.

Bien entendu, comme on le voit sur cet exemple, la convexité de $\sum_{\Omega} (x, y)$ est indépendante de la convexité éventuelle de $f(x, y, .)$. Ce n'est que dans le cas particulier du § VII qu'elles sont liées.

IX - DEUXIEME FORME DU PROBLEME RELAXE

Considérons des 4-uples d'applications mesurables $(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V})$:

$$\tilde{M} = (M_1, \dots, M_{h+1}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{h+1}$$

$$\tilde{U} = (U_1, \dots, U_{h+1}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}^{h+1}$$

$$\tilde{N} = (N_1, \dots, N_{h+1}) : F \longrightarrow \mathbb{R}^{h+1}$$

$$\tilde{V} = (V_1, \dots, V_{h+1}) : F \longrightarrow \mathbb{K}_F^{h+1}$$

On pose :

$$J_2(Y, \tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) f(x, Y(x), U_i(x)) dx + \int_F \sum_{i=1}^{h+1} N_i(s) g(s, Y(s), V_i(s)) ds$$

Le problème relaxé sous la deuxième forme, en abrégé (PR2), sera le problème suivant, où le contrôle est le 4-uple $(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V})$:

$$(P.R2) \left\{ \begin{array}{l} U_i(x) \in K_{\Omega}(x) \text{ p.p. sur } \Omega, \quad i = 1, \dots, h+1 \\ V_i(s) \in K_F(s) \text{ p.p. sur } F, \quad i = 1, \dots, h+1 \\ \tilde{M}(x) \in \bigwedge_{h+1} \text{ p.p. sur } \Omega \\ \tilde{N}(s) \in \bigwedge_{h+1} \text{ p.p. sur } F \\ Y_{\varphi} \in V, \quad a(Y, \varphi) = \langle \Psi, \varphi \rangle + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) \gamma_{\Omega}(x, U_i(x)) \varphi(x) dx + \\ \quad + \int_F \sum_{i=1}^{h+1} N_i(s) \gamma_F(s, V_i(s)) \varphi(s) ds \\ \text{minimiser } \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) f(x, Y(x), U_i(x)) dx + \int_F \sum_{i=1}^{h+1} N_i(s) g(s, Y(s), V_i(s)) ds \end{array} \right.$$

Par abus de notation, nous noterons $Y_{\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}}$ l'état correspondant au contrôle $(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V})$.

Théorème 9.1 : Si $(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V})$ est un contrôle admissible du problème (PR2), alors :

$$(Q = \sum_{i=1}^{h+1} M_i \gamma_{\Omega}(U_i), R = \sum_{i=1}^{h+1} N_i \gamma_F(V_i))$$

est un contrôle admissible du problème (PR1), et l'on a :

$$Y_{Q,R} = Y = Y_{\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}}$$

$$J_1(Y, Q, R) \leq J_2(Y, \tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V})$$

Réciproquement, si (Q, R) est un contrôle admissible du problème (PR1), il existe un contrôle admissible du problème (PR2) :

$$(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V})$$

tel que

$$\sum_{i=1}^{h+1} M_i \gamma_{\Omega}(U_i) = Q, \quad \sum_{i=1}^{h+1} N_i \gamma_F(V_i) = R$$

$$Y_{\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}} = Y = Y_{Q,R}$$

$$J_1(Y, Q, R) = J_2(Y, \tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V})$$

Démonstration

Pour établir le premier point, nous prenons $(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V})$ un contrôle admissible du problème (PR2), et nous posons :

$$Q = \sum_{i=1}^{h+1} M_i \gamma_{\Omega}(U_i) \quad R = \sum_{i=1}^{h+1} N_i \gamma_F(V_i)$$

C'est un contrôle admissible du problème (PR1). Il est clair que :

$$Y_{Q,R} = Y = Y_{\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}}$$

et, en outre, d'après les lemmes 4.2 et 4.2 bis :

$$f^{**}(x, Y(x))(Q(x)) \leq \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) f(x, Y(x), U_i(x)) \quad \forall x \in \Omega$$

$$g^{**}(s, Y(s))(R(s)) \leq \sum_{i=1}^{h+1} N_i(s) g(s, Y(s), V_i(s)) \quad \forall s \in F$$

en intégrant et en ajoutant membre à membre :

$$J_1(Y, Q, R) \leq J_2(Y, M, U, N, V)$$

Pour établir le second point, nous partons d'un contrôle admissible (Q, R) du problème (PR1). Par application des lemmes 4.4 et 4.4 bis, il existe des fonctions $\tilde{M}$ et $\tilde{U}$ mesurables sur Ω telles que :

$$(9.1) \quad \forall x \in \Omega, \quad \tilde{M}(x) \in \Lambda_{h+1}$$

$$(9.2) \quad \forall x \in \Omega, \quad U_i(x) \in K_{\Omega}(x), \quad i = 1, \dots, h+1$$

$$(9.3) \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) \gamma_{\Omega}(x, U_i(x))$$

$$(9.4) \quad \bar{f}^{**}(x, Y(x))(Q(x)) = \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) f(x, Y(x), U_i(x))$$

et des fonctions mesurables $\tilde{N}$ et $\tilde{V}$ telles que :

$$(9.5) \quad \forall s \in F, \quad \tilde{N}(s) \in \Lambda_{h+1}$$

$$(9.6) \quad \forall s \in F, \quad V_i(s) \in K_F(s), \quad i = 1, \dots, h+1$$

$$(9.7) \quad R(s) = \sum_{i=1}^{h+1} N_i(s) \gamma_F(s, V_i(s))$$

$$(9.8) \quad \bar{g}^{**}(s, Y(s))(R(s)) = \sum_{i=1}^{h+1} N_i(s) g(s, Y(s), V_i(s))$$

D'après (9.1), (9.2), (9.5), (9.6), le 4-uple $(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V})$ est un contrôle admissible du problème (PR2). D'après (9.3) et (9.7) :

$$Y_{\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}} = Y = Y_{Q, R}$$

En intégrant (9.4) et (9.8) et en ajoutant, il vient :

$$J_1(Y, Q, R) = J_2(Y, \tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}) .$$

D'où immédiatement le corollaire :

Corollaire . Les problèmes (PR1) et (PR2) ont même valeur. L'application

$$(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}, Y) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{h+1} M_i \gamma_{\Omega}(U_i), \sum_{i=1}^{h+1} N_i \gamma_F(V_i) \right)$$

envoie l'ensemble des solutions optimales du problème (PR2) sur l'ensemble des solutions optimales du problème (PR1)

Le théorème de relaxation prend alors la forme suivante :

Théorème de relaxation. Le problème (PR2) a une solution optimale au moins. Le problème original et le problème (PR2) ont même valeur :

$$\inf (PO) = \min (PR2)$$

Si (U_n, V_n, Y_n) est une suite minimisante du problème original, il existe une suite extraite $(U_{n'}, V_{n'}, Y_{n'})$ et une solution optimale $(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}, Y)$ du problème (PR2) telles que :

$$(9.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\Omega}(U_{n'}) \rightarrow \sum_{i=1}^{h+1} M_i \gamma_{\Omega}(U_i) \quad \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(\Omega), L_h^1(\Omega)) \\ \gamma_F(V_{n'}) \rightarrow \sum_{i=1}^{h+1} N_i \gamma_F(V_i) \quad \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(F), L_h^1(F)) \\ Y_{n'} \rightarrow Y \quad \text{pour } \sigma(W, W') \\ I(Y_{n'}, U_{n'}, V_{n'}) \rightarrow J_2(Y, \tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}) \text{ dans } \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Réciproquement, si $(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}, Y)$ est une solution optimale du problème (PR2), il existe une suite minimisante (U_n, V_n, Y_n) du problème original telle que :

$$(9.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\Omega}(U_n) \rightarrow \sum_{i=1}^{h+1} M_i \gamma_{\Omega}(U_i) \quad \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(\Omega), L_h^1(\Omega)) \\ \gamma_F(V_n) \rightarrow \sum_{i=1}^{h+1} N_i \gamma_F(V_i) \quad \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(F), L_h^1(F)) \\ Y_n \rightarrow Y \quad \text{pour } \sigma(W, W') \\ I(Y_n, U_n, V_n) \rightarrow J_2(Y, \tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V}) \text{ dans } \mathbb{R} \end{array} \right.$$

La deuxième forme du problème relaxé fait apparaître des "réseaux écoulements"

analogues à ceux que R. GANTSEBELIDZE a introduits pour des systèmes régis par des équations différentielles ordinaires ([1] ; un bon exposé dans L. CESARI, [2]).

Exemple 9.2

Reprenons l'exemple 8.1. Le problème (PR2) s'écrit :

$$(PR2) \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial Y}{\partial x_j}) = M_1 U_1 + M_2 U_2 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ Y|_F = 0 \\ U_i(x) \in [-1, 0] \cup \{1\} \quad \forall x \in \Omega, \quad i = 1, 2 \\ (M_1(x), M_2(x)) \in \Lambda_2 \quad \forall x \in \Omega \\ \inf_{\tilde{M}, \tilde{U}} \int_{\Omega} [Y^2(x) - M_1(x) U_1(x)^2 - M_2(x) U_2(x)^2] dx \end{array} \right.$$

On sait que le problème (PR1) a une solution optimale unique $\bar{U} = 0 \quad \bar{Y} = 0$. En appliquant le théorème 9.1 et son corollaire, on obtient que le problème (PR2) a une solution optimale unique :

$$\begin{aligned} \bar{M}_1(x) &= \frac{1}{2} \quad \forall x \in \Omega, & \bar{M}_2(x) &= \frac{1}{2} \quad \forall x \in \Omega \\ \bar{U}_1(x) &= -1 \quad \forall x \in \Omega, & \bar{U}_2(x) &= 1 \quad \forall x \in \Omega \\ \bar{Y} &= 0 \end{aligned}$$

X - TROISIEME FORME DU PROBLEME RELAXE

Notons $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{K}_\Omega)$ l'espace des mesures de Radon positives de masse 1 sur $\mathbb{K}_\Omega$, muni de la topologie vague. De même $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{K}_F)$. Alors, $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{K}_\Omega)$ et $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{K}_F)$ sont des compacts métrisables. On désignera par $\text{Supp}(\mu)$ le support d'une mesure μ :

Considérons les couples d'applications mesurables (μ, ν) :

$$\begin{aligned} \mu : \Omega &\longrightarrow \mathcal{M}_+^1(\mathbb{K}_\Omega) & x &\longmapsto \mu_x \\ \nu : F &\longrightarrow \mathcal{M}_+^1(\mathbb{K}_F) & s &\longmapsto \nu_s \end{aligned}$$

On pose :

$$J_3(Y, \mu, \nu) = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{K}_\Omega} f(x, Y(x), u) \mu_x(du) dx + \int_F \int_{\mathbb{K}_F} g(s, Y(s), v) \nu_s(dv) ds$$

Le problème relaxé sous la troisième forme, en abrégé (PR3) sera le problème suivant, où le contrôle est (μ, ν) :

$$\text{Supp}(\mu_x) \subset \mathbb{K}_\Omega(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

$$\text{Supp}(\nu_s) \subset \mathbb{K}_F(s) \quad \text{p.p. sur } F$$

$$\begin{aligned} \text{(PR3)} \quad a(Y, \varphi) = & \langle \Psi, \varphi \rangle + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{K}_\Omega} \varphi(x) \gamma_\Omega(x, u) \mu_x(dv) dx + \\ & + \int_F \int_{\mathbb{K}_F} \varphi(s) \gamma_F(s, v) \nu_s(dv) ds \quad \forall \varphi \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

$$\min_{\lambda, \mu} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{K}_\Omega} f(x, Y(x), u) \mu_x(du) dx + \int_F \int_{\mathbb{K}_F} g(s, Y(s), v) \nu_s(dv) ds$$

Nous noterons abusivement $Y_{\mu, \nu}$ l'état associé au contrôle μ, ν .

Théorème 10.1 . Si (μ, ν) est un contrôle admissible du problème (PR3), alors

$$x \longmapsto Q(x) = \int_{\mathbb{K}_\Omega} \gamma_\Omega(x, u) \mu_x(du)$$

$$s \longmapsto R(s) = \int_{\mathbb{K}_F} \gamma_F(s, v) \nu_s(dv)$$

est un contrôle admissible du problème (PR1), et l'on a :

$$Y_{Q,R} = Y = Y_{\mu,\nu}$$

$$J_1(Y, Q, R) \leq J_3(Y, \mu, \nu)$$

Réciproquement, si (Q,R) est un contrôle admissible du problème (PR1), il existe un contrôle admissible (μ,ν) du problème (PR3) tel que :

$$\forall x, \int_{K_\Omega} \gamma_\Omega(x,u) \mu_x(du) = Q(x)$$

$$\forall s, \int_{K_F} \gamma_F(s,v) \nu_s(dv) = R(s)$$

$$Y_{\mu,\nu} = Y = Y_{Q,R}$$

$$J_3(Y, \mu, \nu) = J_1(Y, Q, R)$$

Démonstration

Pour établir le premier point, nous prenons (μ, ν) un contrôle admissible du problème (PR3), et nous posons :

$$Q : x \mapsto \int_{K_\Omega} \gamma_\Omega(x,u) \mu_x(du)$$

$$R : s \mapsto \int_{K_F} \gamma_F(s,v) \nu_s(dv)$$

On a :

$$(10.1) \quad \forall x \in \Omega, \quad Q(x) \in \widehat{\Gamma}_\Omega(x)$$

$$(10.2) \quad \forall s \in F, \quad R(s) \in \widehat{\Gamma}_F(s)$$

Montrons que Q et R sont mesurables. Par application du théorème de SCORZA-DRAGONI (CASTAING, [5], théorème 3.1) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que :

$$\text{mes}(\Omega \setminus K) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\gamma_\Omega(.,.) \Big|_{K \times K_\Omega} \text{ est continue}$$

Une fonction continue sur un compact est uniformément continue. Donc l'application :

$$\begin{aligned} x &\mapsto \gamma_{\Omega}(x, \cdot) \\ K &\rightarrow C^0(K_{\Omega}) \end{aligned}$$

est continue. Comme μ est mesurable, il existe un compact $H \subset K$ tel que :

$$\text{mes}(K \setminus H) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu|_H \text{ est continue.}$$

Donc l'application :

$$x \mapsto \langle \gamma_{\Omega}(x, \cdot), \mu_x \rangle = \int_{K_{\Omega}} \gamma_{\Omega}(x, u) \mu_x(du) = Q(x).$$

est continue sur H , avec :

$$\text{mes}(\Omega \setminus H) \leq \varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, l'application Q est mesurable sur Ω . De même, l'application R est mesurable sur F .

Joint à (10.1) et (10.2), ceci prouve que Q et R sont des contrôles admissibles du problème (PR1). Il est clair que :

$$Y_{Q,R} = Y = Y_{\mu,\nu}$$

et en outre, d'après les lemmes 4.1 et 4.1 bis, pour tout $x \in \Omega$ et tout $s \in F$:

$$\begin{aligned} f^{**}(x, Y(x))(Q(x)) &\leq \int_{K_{\Omega}} f(x, Y(x), u) \mu_x(du) \\ g^{**}(s, Y(s))(R(s)) &\leq \int_{K_F} g(s, Y(s), v) \nu_s(dv) \end{aligned}$$

En intégrant et en ajoutant membre à membre :

$$J_1(Y, Q, R) \leq J_3(Y, \mu, \nu)$$

Pour établir le second point, on se sert du théorème 9.1. Donnons-nous un contrôle admissible (Q, R) du problème (PR1). D'après le théorème (9.1), il existe un contrôle admissible $(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V})$ du problème (PR2) tel que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) \gamma_{\Omega}(x, U_i(x)) = Q(x)$$

$$\forall s \in F, \quad \sum_{i=1}^{h+1} N_i(s) \gamma_F(s, v_i(s)) = R(s)$$

$$Y_{\tilde{M}}, \tilde{U}, \tilde{N}, \tilde{V} = Y = Y_{Q,R}$$

$$J_1(Y, Q, R) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) f(x, Y(x), U_i(x)) dx + \int_F \sum_{i=1}^{h+1} N_i(s) g(s, Y(s), V_i(s)) ds$$

On pose alors :

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{h+1} M_i(x) \delta_{U_i(x)}$$

$$\nu_s = \sum_{i=1}^{h+1} N_i(s) \delta_{V_i(s)}$$

en désignant par δ_u et δ_v les mesures de Dirac en u et v . Il est clair que μ et ν répondent à la question.

Pour μ et ν donnés, nous notons $\int_{K_{\Omega}} \gamma_{\Omega} \mu(dv)$ et $\int_{K_F} \gamma_F \nu(dv)$ les applications de Ω et F dans $[-1, 1]^h$:

$$\begin{aligned} \int_{K_{\Omega}} \gamma_{\Omega} \mu(du) &: x \mapsto \int_{K_{\Omega}} \gamma_{\Omega}(x, u) \mu_x(du) \\ \int_{K_F} \gamma_F \nu(dv) &: s \mapsto \int_{K_F} \gamma_F(s, v) \nu_s(dv) \end{aligned}$$

On a alors le corollaire :

Corollaire. Les problèmes (PR1) et (PR3) ont une valeur. L'application :

$$(\mu, \nu, Y) \mapsto \left(\int_{K_{\Omega}} \gamma_{\Omega} \mu(du), \int_{K_F} \gamma_F \nu(dv), Y \right)$$

envoie l'ensemble des solutions optimales du problème (PR3) sur l'ensemble des solutions optimales du problème (PR1).

Le théorème de relaxation prend la forme suivante :

Théorème de relaxation. Le problème (PR3) a une solution optimale. Le problème original et le problème (PR3) ont même valeur :

$$\inf (P0) = \min (PR3)$$

Si (U_n, V_n, Y_n) est une suite minimisante du problème original, il existe une suite extraite $(U_{n'}, V_{n'}, Y_{n'})$ et une solution optimale (μ, ν, Y) du problème (PR3) telles que :

$$(10.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\Omega}(U_{n'}) \longrightarrow \int_{K_{\Omega}} \gamma_{\Omega} \mu(du) \quad \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(\Omega), L_h^1(\Omega)) \\ \gamma_F(V_{n'}) \longrightarrow \int_{K_F} \gamma_F \nu(dv) \quad \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(F), L_h^1(F)) \\ Y_{n'} \longrightarrow Y \quad \text{pour } \sigma(V, V') \\ I(Y_{n'}, U_{n'}, V_{n'}) \longrightarrow J_3(Y, \mu, \nu) \quad \text{dans } \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Réciproquement, si (μ, ν, Y) est une solution optimale du problème (PR3), il existe une suite minimisante (U_n, V_n, Y_n) du problème original telle que

$$(10.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\Omega}(U_n) \longrightarrow \int_{K_{\Omega}} \gamma_{\Omega} \mu(du) \quad \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(\Omega), L_h^1(\Omega)) \\ \gamma_F(V_n) \longrightarrow \int_{K_F} \gamma_F \nu(dv) \quad \text{pour } \sigma(L_h^{\infty}(F), L_h^1(F)) \\ Y_n \longrightarrow Y \quad \text{pour } \sigma(V, V') \\ I(Y_n, U_n, V_n) \longrightarrow J_3(Y, \mu, \nu) \quad \text{dans } \mathbb{R} \end{array} \right.$$

La troisième forme du problème relaxé a une interprétation probabiliste très intéressante : en chaque point x ou s , au lieu de choisir un contrôle déterministe $U(x)$ ou $V(s)$, on choisit une probabilité de répartition μ_x ou ν_s sur l'ensemble $K_{\Omega}(x)$ ou $K_F(s)$ des contrôles permis au point x ou s . C'est un point de vue déjà étudié dans le cas des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires, avec critère final : qu'il nous suffise de citer A. GHOUILA-HOURI, [1].

Auparavant, L. YOUNG avait introduit dans le calcul des variations le concept très voisin de "surface généralisée" obtenant ainsi des résultats très intéressants que nous allons transcrire ($[1]$, $[2]$, $[3]$).

XI - UN RESULTAT DE L. YOUNG

Le problème suivant a été étudié par L. YOUNG ([1], [2]). C'est un problème de Calcul des variations en dimension n , qui ne se ramène pas à un problème de contrôle, et n'est donc pas justifiable des méthodes employées jusqu'ici.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière F . Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de rapport k_1 sur $\bar{\Omega}$, uniformément bornées par k_0 . Toute fonction Y de $\mathcal{C}$ est dérivable au sens des distributions, et l'on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial Y(x)^2}{\partial x_i} \right)^{\frac{1}{2}} \leq k_1$$

Soit Y_0 fixé dans $\mathcal{C}$. On se pose le problème :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y \in \mathcal{C} \\ Y|_F = Y_0|_F \\ \text{minimiser} \quad \int_{\Omega} f(x, Y(x), \text{grad } Y(x)) dx \end{array} \right.$$

Notons B la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre O et de rayon k_1 . Notons $\mathcal{M}_+^1(B)$

l'espace des probabilités de Radon sur B muni de la topologie vague. Considérons les applications mesurables μ de Ω dans $\mathcal{M}_+^1$. On se pose le problème :

$$(II.1) \quad Y \in \mathcal{C}, \quad Y|_F = Y_0|_F$$

$$(II.2) \quad \forall x \in \Omega, \quad \int_B u \mu_x = \text{grad } Y$$

$$(II.3) \quad \text{minimiser} \quad \int_{\Omega} \int_B f(x, Y(x), u) \mu_x(du) dx$$

Un couple (μ, Y) satisfaisant à (II.1) et (II.2) est dit surface généralisée, et on cherche à minimiser le critère (II.3) sur l'ensemble des surfaces généralisées.

L. YOUNG démontre le théorème suivant :

Théorème II.1. Le problème (II) a une solution optimale au moins, et les problèmes (I) et (II) ont même valeur. Si $(\bar{\mu}, \bar{Y})$ est solution optimale du problème (II), $\bar{Y}$ est limite uniforme d'une suite minimisante Y_n du

problème (I) , et si Y_n est une suite minimisante du problème (I), il existe une solution optimale $(\bar{\mu}, \bar{Y})$ du problème (II) et une suite extraite Y_k convergeant uniformément vers $\bar{Y}$

En procédant comme aux paragraphes 9 et 10 , on peut donner du problème (II) deux formes équivalentes :

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} Y \in \mathcal{C} \quad Y|_F = Y_0|_F \\ \text{minimiser} \quad \int_{\Omega} \bar{f}^{**}(x, Y(x)) (\text{grad } Y(x)) \, dx \end{array} \right. \\
 \text{(IV)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega, \quad \tilde{M}(x) \in \Lambda_{n+1} \\ \forall x \in \Omega, \quad U_i(x) \in B, \quad i = 1, \dots, n+1 \\ \forall Y \in \mathcal{C}, \quad Y|_F = Y_0|_F \\ \forall x \in \Omega, \quad \text{grad } Y(x) = \sum_{i=1}^{n+1} M_i(x) U_i(x) \\ \text{minimiser} \quad \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n+1} M_i(x) f(x, Y(x), U_i(x)) \, dx \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

L'on peut réénoncer le théorème II.1 dans chacun des cas (III) et (IV) . On voit que l'on a un pendant en calcul des variations multidimensionnel de la théorie que l'on vient de développer pour le contrôle de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type elliptique. Le problème (II) correspond au problème (PR3), le problème (III) au problème (PR1) et le problème (IV) au problème (PR2).

XII - CONCLUSION

Au terme de cette étude, nous voudrions ouvrir deux perspectives :

- (a) la linéarité de l'opérateur A n'est intervenue que pour rendre continue l'application $(U,V) \mapsto Y_{U,V}$ de $\sigma(L_h^\infty, L_h^1) \times \sigma(L_h^\infty, L_h^1)$ dans W faible. Ceci permet de penser que certains cas où l'opérateur A est non-linéaire pourraient être traités de la même façon.
- (b) la conjonction des méthodes employées pour les équations différentielles ordinaires, et des méthodes du cas elliptique, dans l'espoir de traiter le cas parabolique (équations différentielles opérationnelles).

B I B L I O G R A P H I E

N. BOURBAKI

- [1] Topologie générale, Chapitre 9 , 2e édition, Hermann.
- [2] Topologie générale, Chapitre 10 , 2e édition, Hermann.
- [3] Intégration, Chapitres 1, 2, 3 et 4 , 2e édition, Hermann.
- [4] Intégration, Chapitre 5 , 2e édition, Hermann.

C. BERGE

- [1] Espaces topologiques et fonctions multivoques, 2e édition, Dunod.

C. CASTAING

- [1] Sur une extension du théorème de Ljapunov, C.R. Acad. Sc. Paris, 260(1965) , pp. 3838 - 3841.
- [2] Quelques problèmes de mesurabilité liés à la théorie de la commande, C.R. Acad. Sc. Paris, 262 (1966), p.p. 409 - 411.
- [3] Sur les équations différentielles multivoques, C.R. Acad. Sc. Paris, 263 (1966), p.p. 63-66.
- [4] Sur une nouvelle extension du théorème de Ljapunov, C.R. Acad. Sc. Paris, 264 (1967) p.p. 333-336.
- [5] Sur les multi-applications mesurables, Revue d'informatique et de recherche opérationnelle, 1ère année, N° 1, 1967, p.p. 91 - 126, Dunod.
- [6] Sur un théorème de représentation intégrale lié à la comparaison des mesures, C.R. Acad. Sc. Paris, 264 (1967) 1059 - 1062.
- [7] Sur les multi-applications mesurables, Thèse, Caen, 1967.

L. CESARI

- [1] Existence theorem for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints, I , Transactions A.M.S., vol. 124, N° 3, Sept. 1966, p.p. 369 - 412.
- [2] Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints, II, Transaction A.M.S. vol. 124, N° 3, Sept. 1966, p.p. 413 - 430.

- [3] Existence theorems for multidimensional problems of optimal control, Differential equations and dynamical systems, (J.HALE and J. la SALLE editors) p.p. 115-132, Academic Press 1967.
- [4] Existence theorems for multidimensional Lagrange problems, Journal of optimization theory and applications, 1, p.p. 87-112, 1967.
- [5] Sobolev spaces and multidimensional Lagrange problems of optimization, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol XXII, fasc II (1968), p.p. 193-227.
- [6] Multidimensional Lagrange problems of optimization in a fixed domain, and an application to a problem of magneto hydrodynamics, Archive for Rational mechanics and Analysis, vol.29, N°2, 1968, p.P.81-104.
- [7] Optimization with partial differential equations in Dieudonné-Rashevsky form and conjugate problems, Archive for Rational mechanics and Analysis, vol.33, N° 5 , 1969, p.p.339-357

I. EARLAND

- [1] Sur certains problèmes de contrôle optimal, C.R. Acad. Sc.Paris, 268 (1969), p.p. 1585 - 1588.
- [2] Relaxation de problèmes de contrôle pour des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, C.R. Acad. Sc. Paris. 270 (1970) p.p. 1283-1286.
- [3] Formes équivalentes d'un problème relaxé, C.R. Acad. Sc. Paris.

R. GAMKRELIDZE

- [1] Régimes optimaux glissants, DAN SSSR 143 (1962), p.p. 1243-1245. (en russe). Traduction dans Soviet Math. Dokl. 3 (1962), pp.559-561.

A. GHOUILA-HOURI

- [1] Généralisation de la notion de commande d'un système guidable, Revue d'informatique et de recherche opérationnelle, 1ère année, N° N° 4, 1967, p.p. 7-32 , Dunod.

A. IOFFE et V. TIHOMIROV

- [1] Extension des problèmes en calcul des variations, Trudy moskovskovo matematičeskovo obšestva, 18 (1968) 188-246 (en russe).

S. KARLIN

- [1] On extreme points of vector functions, Proceedings A.M.S., vol.4 (1953), p.p. 603-610.

M. KRASNOSEL'SKII

- [1] Topological methods in the theory of non linear integral equations Pergamon Press, 1964 (traduction).

J.L. LIONS

- [1] Contrôle optimal de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles, Dunod-Gauthier-Villars, 1968.
- [2] Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod-Gauthier-Villars, 1969.

J.L.LIONS et E.MAGENES

- [1] Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, 1968.

E. Mc SHANE

- [1] Generalized curves, Duke Math. Journal, 6 (1940), p.p. 513-536.

P.A. MEYER

- [1] Probabilités et potentiel, Hermann, 1966.

J.J. MOREAU

- [1] Fonctionnelles convexes, Séminaire Leray, Collège de France, 1966-1967.

J. NEČAS

- [1] Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, 1967.

R. PALLU DE LA BARRIERE

- [1] Cours d'automatique théorique, Dunod, 1966.

R.T. ROCKAFELLAR

- [1] Integrals which are convexe functionals, Pacific Journal of Mathematics, vol.24, N° 3, 1968, p.p. 525-539

- [2] Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.

G. SCORZA-DRAGONI

- [1] Un teorema sulle funziona continue rispetto ad una e misurabile rispetto ad un'altra variabile, Rend. Sem. Math. Padova, 17(1948), 102-106.

J. WARGA

- [1] Relaxed variational problems, J.Math. Anal. Appl., 4(1962), pp. 111-128.

L.YOUNG

- [1] Generalized surfaces in the Calculus of variations, I, Ann. of Math., 43(1942), 84-103.
- [2] Generalized surfaces in the Calculus of variations, II, Ann. of Math., 43(1942), 530-544.
- [3] Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, W.B. Saunders, 1969.

TABLE DES MATIERES

Pages

1	§ 0	Résumé
2	§ I	Compléments sur les espaces L^p $1 \leq p < \infty$
11	§ II	Un système gouverné par une équation elliptique linéaire.
17	§ III	Changement de contrôle : un problème équivalent.
22	§ IV	Relaxation du problème de contrôle.
33	§ V	Démonstration du théorème de relaxation.
50	§ VI	Existence de solutions optimales.
52	§ VII	Un cas particulier.
54	§ VIII	Exemples.
58	§ IX	Deuxième forme équivalente du problème relaxé.
63	§ X	Troisième forme équivalente du problème relaxé.
69	§ XI	Un résultat de L. YOUNG.
71	§ XII	Conclusion

Bibliographie.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Vu et approuvé

Paris, le ...5. JANVIER..... 19.71.

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

Vu
et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

